Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

I

ФИЗМАТГИЗ · 1960



Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ I

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для механико-математических
и физико-математических факультетов
государственных университетов и учебного пособия
для физико-математических факультетов
педагогических институтов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

11-5-2

Фихтенгольц Григорий Михайлович

Основы математического анализа, том I

Редактор *Г. П. Акилов* Техн. редактор *Л. А. Ратенберг*

Печать с матриц. Подписаио к печати 29/IV 1960 г. Бумага $60 \times 92/_{16}$.
Фнз. печ. л. 27,5. Усл. печ. л. 27,5. Уч.-изд. л. 29,1. Тнраж 50 000 экз. Зак. № 1413.
Цена 9 р. 75 к.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, Леиинский пр., 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Леиинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Непрерывность (и разрывы) функции

§ 2. Свойства непрерывных функций

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная и ее вычисление

§ 2. Дифференциал

§ 3. Производные и дифференциалы высших порядков

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Основы математического анализа» задуманы как учебник анализа для студентов первого и второго курсов математических отделений университетов; в соответствии с этим и книга делится на два тома. При составлении ее был широко использован мой трехтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления», но содержащийся в нем материал подвергся сокращению и переработке в целях приближения книги к официальной программе по математическому анализу и к фактическим возможностям лекционного курса.

Мои установки и задачи, которые я перед собой ставил, характеризуются следующим.

1. Главную свою задачу я видел в систематическом и — по возможности — строгом изложении основ математического анализа. Я считаю изложение материала в логической последовательности обязательным дла учебника, для того чтобы перед глазами учащихся знания располагались в определенной системе.

Такое построение учебника, впрочем, не исключает возможности для лектора в отдельных случаях — по соображениям педагогическим — отступать от строгой систематичности (а, может быть, даже облегчает ему эту возможность). Я сам, например, в лекционном курсе обычно несколько отодвигаю такие трудные для начинающего вещи, как теория вещественных чисел, принцип сходимости или свойства непрерывных функций.

2. Вместе с тем, курс математического анализа не должен представляться учащемуся лишь длинной цепью «определений» и «теорем», но должен служить руководством к действию. Студентов нужно научить применять эти теоремы на практике, помочь им овладеть вычислительным аппаратом анализа. Хотя эта задача в большей мере падает на упражнения по анализу, но и изложение теоретического материала я сопровождаю примерами, по необходимости — в небольшом

числе, но подобранными так, чтобы подготовить учащихся к сознательной работе на упражнениях.

3. Известно, какие замечательные и разнообразные приложения имеет математический анализ как в самой математике, так и в смежных областях знания; с этим студенты много раз будут сталкиваться впоследствии. Но самая мысль о связи математического анализа с другими математическими дисциплинами и с потребностями практики должна быть усвоена учащимися уже при изучении основ анализа. Вот почему везде, где это представляется возможным, я привожу примеры применения анализа не только в геометрии, но и в механике, физике и технике.

4. Вопрос о доведении аналитических выкладок до числа имеет в равной мере принципиальное и прикладное значение. Так как «точное» или «в конечном виде» решение задач анализа возможно лишь в простейших случаях, то приобретает важность ознакомление учащихся с использованием приближенных методов и с составлением приближенных формул. Этому в книге также уделено внимание.

5. Хотелось бы сделать немногие пояснения относительно самого изложения. Прежде всего коснусь понятия предела, которое занимает центральное место среди основных понятий анализа и проходит буквально через весь курс, появляясь притом в различных формах. Последнее обстоятельство выдвигает задачу — установить единство всех разновидностей предела. Это не только принципиально важно, но и практически необходимо, дабы не строить всякий раз наново теории пределов. Для достижения этой цели есть два пути: либо сразу дать самое общее определение предела «направленной переменной» (например, следуя Шатуновскому и Муру — Смиту), либо же сводить всякий предел к простейшему случаю — пределу переменной, пробегающей занумерованную последовательность значений. Первая точка зрения недоступна начинающему, поэтому я остановился на второй: определение каждого нового вида предела дается, прежде всего, с помощью предела последовательности и лишь затем — «на языке ε-δ».

6. Отмечу еще одну деталь изложения: во втором томе, говоря о криволинейных и поверхностных интегралах, я провожу различие между криволинейными и поверхностными «интегралами первого типа» (точные аналоги обыкновенного и двойного интегралов по неориентированным областям) и такими же «интегралами второго типа» (где

аналогия уже частично исчезает). На опыте я многократно убеждался в том, что такое различение способствует лучшему усвоению и удобно для приложений.

7. В виде небольшого дополнения к программе, я включил в книгу краткое ознакомление с эллиптическими интегралами (так часто встречающимися на практике) и в нескольких случаях даю задачи, приводящие именно к эллиптическим интегралам. Пусть этим будет разрушена вредная иллюзия, воспитываемая решением одних лишь простых задач, будто результаты аналитических выкладок непременно должны быть «элементарными»!

8. В разных местах книги читатель найдет замечания историко-математического характера. Кроме того, первый том завершается «Историческим очерком возникновения основных идей математического анализа», а в конце второго тома помещен «Очерк дальнейшего развития математического анализа». Конечно, все это вовсе не призвано подменить историю математического анализа, с которой учащиеся ознакомятся впоследствии в общем курсе «истории математики». Если в первом из упомянутых очерков затрагивается самый *генезис* понятий, то исторические замечания имеют целью создать у читателей хотя бы *общую ориентацию в хронологии* важнейших событий из истории анализа.

В тесной связи с только что сказанным, я обращаюсь теперь с предупреждением непосредственно к *читателю — учащемуся*. Дело в том, что порядок изложения в книге связан с *современными* требованиями к математической строгости, созревавшими в течение длительного времени, и поэтому, естественно, отклоняется от того пути, по которому исторически математический анализ развивался. Как говорит Маркс: «...историческое развитие всех наук только через множество перекрещивающихся и окольных путей приводит к их действительной исходной точке. В отличие от других архитекторов, наука... возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем она заложила его фундамент» *).

С подобным положением вещей читатель столкнется при изучении анализа с самого же начала: первая глава книги посвящена «вещественным числам», третья — «теории пределов», и лишь с пятой главы начинается систематическое изложение дифференциального

*) К. *Маркс* и Ф. *Энгельс*, Сочинения (изд. 1935 г.), т. XII, ч. I, стр. 44.

и интегрального исчисления. Исторически же порядок был как раз обратным: дифференциальное и интегральное исчисление зародилось в XVII веке и развивалось в XVIII веке, находя себе многочисленные и важные приложения; теория пределов стала фундаментом для математического анализа в начале XIX века, а лишь во второй его половине была создана отчетливая концепция вещественного числа, обосновывающая наиболее тонкие положения самой теории пределов.

Это книга подытоживает мой многолетний опыт преподавания математического анализа в Ленинградском университете. Да будет она полезна советской молодежи!

Г. М. Фихтенгольц

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. МНОЖЕСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО УПОРЯДОЧЕНИЕ

1. Предварительные замечания. Из школьного курса читателю хорошо знакомы рациональные числа и их свойства. В то же время уже потребности элементарной математики приводят к необходимости расширения этой числовой области. Действительно, среди рациональных чисел не существует зачастую корней даже из целых положительных (натуральных) чисел, например $\sqrt{2}$, т. е. *нет такой рациональной дроби* $\frac{p}{q}$, *где* p *и* q — *натуральные числа, квадрат которой был бы равен* 2.

Для доказательства этого допустим противное: пусть существует такая дробь $\frac{p}{q}$, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Мы вправе считать эту дробь несократимой, т. е. p и q лишенными общих множителей. Так как $p^2 = 2q^2$, то p есть число четное: $p = 2r$ (r — целое) и, следовательно, q — нечетное. Подставляя вместо p его выражение, найдем $q^2 = 2r^2$, откуда следует, что q — четное число. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Одновременно с этим, если бы мы оставались в области одних лишь рациональных чисел, в геометрии заведомо не все отрезки могли бы быть снабжены д л и н а м и. В самом деле, рассмотрим квадрат со стороной, равной единице длины. *Его диагональ не может иметь рациональной длины* $\frac{p}{q}$, ибо, в противном случае, по теореме Пифагора квадрат этой длины был бы равен 2, что, как мы видели, невозможно.

В настоящей главе мы ставим себе задачей расширить область рациональных чисел, присоединив к ним числа новой природы — и р р а ц и о н а л ь н ы е.

В математической практике иррациональные числа фактически начинают появляться — под видом выражений, содержащих радикалы, — еще в средние века, но н а с т о я щ и м и числами их не считали. В XVII веке метод координат, созданный Декартом*), с новой силой поднял вопрос о численном

---

*) Рене Д е к а р т (1596—1650) — знаменитый французский философ и ученый.

выражении геометрических величин. Под влиянием этого постепенно стала созревать идея о равноправии иррациональных и рациональных чисел; она нашла себе окончательную формулировку в определении (положительного) числа, которое дал Ньютон*) в своей «Всеобщей арифметике» (1707)**):

«Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

При этом целые и дробные числа выражают величины, соизмеримые с единицей, а иррациональные — несоизмеримые с единицей.

Математический анализ, зародившийся в XVII веке и бурно развивавшийся в течение всего XVIII века, долго довольствовался этим определением, несмотря на то, что оно было чуждо арифметике и оставляло в тени важнейшее свойство расширенной числовой области — ее непрерывность (см. ниже n° 5). Критическое направление в математике, которое возникло в конце XVIII и в начале XIX века, выдвинуло требование точного определения основных понятий анализа и строгого доказательства его основных положений. Это, в свою очередь, скоро сделало необходимым построение логически безупречной теории иррациональных чисел на основе чисто арифметического их определения. В семидесятых годах прошлого столетия было создано несколько таких теорий, различных по форме, но по существу равносильных. Все они определяют иррациональное число, ставя его в связь с тем или другим бесконечным множеством рациональных чисел.

2. Определение иррационального числа. Мы изложим теорию иррациональных чисел, следуя Дедекинду***). В основе этой теории лежит понятие о сечении в области рациональных чисел. Рассмотрим разбиение множества всех рациональных чисел на два непустых (т. е. действительно содержащих хоть по одному числу) множества A, A'; иными словами, мы предполагаем, что

1°. *каждое рациональное число попадает в одно, и только в одно, из множеств A или A'.*

Мы будем называть такое разбиение сечением, если выполняется еще условие:

2°. *каждое число a множества A меньше каждого числа a' множества A'.*

Множество A называется нижним классом сечения, множество A' — верхним классом. Сечение будем обозначать $A|A'$.

Из определения сечения следует, что всякое рациональное число, меньшее числа a нижнего класса, также принадлежит нижнему классу. Аналогично, всякое рациональное число, большее числа a' верхнего класса, и само принадлежит верхнему классу.

Примеры. 1) Определим A как множество всех рациональных чисел a, удовлетворяющих неравенству $a < 1$, а к множеству A' отнесем все числа a', для которых $a' \geqslant 1$.

---

*) Исаак Ньютон (1642—1727) — величайший английский физик и математик.

**) Имеется русский перевод: «Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе» (АН СССР, 1948); см. стр. 8.

***) Рихард Дедекинд (1831—1916) — немецкий математик.

Легко проверить, что таким образом мы действительно получим сечение. Число единица принадлежит классу A' и является, очевидно, в нем наименьшим числом. С другой стороны, нет наибольшего числа в классе A, так как, какое бы число a из A мы ни взяли, всегда можно указать рациональное число a_1, лежащее между ним и единицей, следовательно, бо́льшее a и тоже принадлежащее классу A.

2) К нижнему классу A отнесем все рациональные числа a, меньшие или равные единице: $a \leqslant 1$; к верхнему — рациональные числа a', большие единицы: $a' > 1$.

Это также будет сечение, причем здесь в верхнем классе нет наименьшего числа, а в нижнем есть наибольшее (именно, единица).

3) Отнесем к классу A все положительные рациональные числа a, для которых $a^2 < 2$, число нуль и все отрицательные рациональные числа, а к классу A' — все положительные рациональные числа a', для которых $a'^2 > 2$.

Как легко убедиться, мы опять получили сечение. Здесь ни в классе A нет наибольшего числа, ни в классе A' — наименьшего. Докажем, например, первое из этих утверждений (второе доказывается аналогично). Пусть a — любое положительное число класса A, тогда $a^2 < 2$. Покажем, что можно подобрать такое целое положительное n, что

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

так что и число $a + \frac{1}{n}$ будет принадлежать классу A.

Это неравенство равносильно таким:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2,$$

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2.$$

Последнее неравенство и подавно будет выполнено, если n удовлетворит неравенству $\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$, для чего достаточно взять

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}.$$

Итак, каково бы ни было положительное число a из класса A, в этом же классе A найдется большее его число; так как для чисел $a \leqslant 0$ это утверждение непосредственно очевидно, то никакое число класса A не является в нем наибольшим.

Легко понять, что *не может существовать сечение, для которого одновременно в нижнем классе нашлось бы наибольшее число* a_0, *а в верхнем классе — наименьшее* a'_0. Пусть, в самом деле, такое сечение существует. Возьмем тогда любое рациональное число c, заключающееся между a_0 и a'_0, $a_0 < c < a'_0$. Число c не может

принадлежать классу A, ибо иначе a_0 не было бы наименьшим числом в этом классе, и по аналогичной причине c не может принадлежать классу A', а это противоречит свойству 1° сечения, входящему в определение этого понятия.

Таким образом, сечения могут быть только трех видов, иллюстрируемых как раз примерами 1), 2), 3):

1) либо в нижнем классе A нет наибольшего числа, а в верхнем классе A' есть наименьшее число r;

2) либо в нижнем классе A имеется наибольшее число r, а в верхнем классе A' нет наименьшего;

3) либо, наконец, ни в нижнем классе нет наибольшего числа, ни в верхнем классе — наименьшего.

В первых двух случаях мы говорим, что сечение производится рациональным числом r (которое является пограничным между классами A и A') или что сечение определяет рациональное число r. В примерах 1), 2) таким числом r была единица. В третьем случае пограничного числа не существует, сечение не определяет никакого рационального числа. Введем теперь новые объекты — иррациональные числа, условившись говорить, что *всякое сечение вида* 3) *определяет некоторое иррациональное число* α. Это число α заменяет недостающее пограничное число, мы как бы вставляем его между всеми числами a класса A и всеми числами a' класса A'. В примере 3) это вновь созданное число, как легко догадаться, и будет $\sqrt{2}$.

Не вводя для иррациональных чисел никаких однотипных обозначений*), мы неизменно будем связывать иррациональное число α с тем сечением $A|A'$ в области рациональных чисел, которое его определяет.

Для однообразия нам часто удобно будет то же сделать и по отношению к рациональному числу r. Но для каждого числа r существует два определяющих его сечения: в обоих случаях числа $a < r$ относятся к нижнему классу, числа же $a' > r$ — к верхнему, но само число r можно по произволу включить либо в нижний класс (тогда r там будет наибольшим), либо в верхний (и r там будет наименьшим). Для определенности мы условимся раз навсегда, говоря о сечении, определяющем рациональное число r, включать это число в верхний класс.

Числа рациональные и иррациональные получили общее название вещественных (или действительных) чисел. Понятие вещественного числа является одним из основных понятий математического анализа, как и всей математики вообще.

---

*) Речь идет о конечных обозначениях; со своего рода бесконечными обозначениями иррациональных чисел читатель познакомится в n° 4. Чаще всего индивидуально заданные иррациональные числа обозначают в зависимости от их происхождения и роли: $\sqrt{2}$, $\log 5$, $\sin 10°$ и т. п.

3. Упорядочение множества вещественных чисел. *Два иррациональных числа α и β, определяемых, соответственно, сечениями $A|A'$ и $B|B'$, считаются равными в том и только в том случае, если эти сечения тождественны*; впрочем, достаточно потребовать совпадения нижних классов A и B, ибо верхние классы A' и B' тогда совпадут сами собой. Это определение можно сохранить и в случае, когда числа α и β рациональны. Иными словами, *если два рациональных числа α и β равны, то определяющие их сечения совпадают, и, обратно, из совпадения сечений вытекает равенство чисел α* и β. При этом, разумеется, следует учесть условие, заключенное выше насчет рациональных чисел.

Перейдем теперь к установлению понятия «больше» по отношению к вещественным числам. Для рациональных чисел это понятие уже известно из школьного курса. Для рационального числа r и иррационального числа α понятие «больше» было, собственно, установлено в n°2: именно, если α определяется сечением $A|A'$, мы считаем, что α больше всех рациональных чисел, входящих в класс A, и в то же время все числа класса A' больше α.

Пусть теперь имеем два иррациональных числа α и β, причем α определяется сечением $A|A'$, а β — сечением $B|B'$. Мы будем считать то число бо́льшим, у которого нижний класс больше. Точнее говоря, *мы будем считать $\alpha > \beta$, если класс A целиком содержит в себе класс B, не совпадая с ним.* (Это условие, очевидно, равносильно тому, что класс B' целиком содержит в себе класс A', не совпадая с ним). Легко проверить, что это определение может быть сохранено и для случаев, когда одно из чисел α, β или даже оба — рациональны.

Понятие «меньше» вводится уже как производное. Именно, говорят, что $\alpha < \beta$ в том и только в том случае, если $\beta > \alpha$.

Из наших определений можно вывести, что

для каждой пары вещественных чисел α и β имеет место одно, и только одно, из соотношений

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha < \beta.$$

Далее,

из $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ *следует что* $\alpha > \gamma$.

Очевидно также, что

из $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ *следует, что* $\alpha < \gamma$.

Установим, наконец, два вспомогательных утверждения, которые не раз будут нам полезны в последующем изложении.

Лемма 1. *Каковы бы ни были два вещественных числа α и β, причем $\alpha > \beta$, всегда найдется такое вещественное — и даже, в частности, рациональное — число r, которое содержится между ними*: $\alpha > r > \beta$ (а следовательно, и бесчисленное множество таких рациональных чисел).

Так как $\alpha > \beta$, то нижний класс A сечения, определяющего число α, целиком содержит в себе нижний класс B для числа β, не совпадая

с B. Поэтому в A найдется такое рациональное число r, которое не содержится в B и, следовательно, принадлежит B'; для него

$$\alpha > r \geqslant \beta$$

(равенство могло бы иметь место, лишь если β было рационально). Но так как в A нет наибольшего числа, то, в случае надобности увеличив r, можно равенство исключить.

Лемма 2. *Пусть даны два вещественных числа α и β. Если, какое бы ни взять рациональное число $e > 0$, числа α и β могут быть заключены между одними и теми же рациональными границами:*

$$s' \geqslant \alpha \geqslant s, \quad s' \geqslant \beta \geqslant s,$$

разность которых меньше e:

$$s' - s < e,$$

то числа α и β необходимо равны.

Доказательство будем вести от противного. Пусть, например, $\alpha > \beta$. По лемме 1, между α и β можно вставить два рациональных числа r и $r' > r$:

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

Тогда для любых двух чисел s и s', между которыми содержатся α и β, будут, очевидно, выполняться неравенства

$$s' > r' > r > s, \quad \text{откуда} \quad s' - s > r' - r > 0,$$

так что разность $s' - s$, вопреки условию леммы, не может быть сделана, например, меньшей числа $e = r' - r$. Это противоречие доказывает лемму.

4. Представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью. Мы имеем в виду такое представление, при котором дробная часть (мантисса) положительна, в то время, как целая часть может оказаться как положительной, так и отрицательной или нулем.

Предположим сначала, что рассматриваемое вещественное число α не является ни целым числом, ни какой-либо конечной десятичной дробью. Станем искать его десятичные приближения. Если оно определяется сечением $A|A'$, то прежде всего легко убедиться, что в классе A найдется целое число M, а в классе A' — целое же число $N > M$. Прибавляя к M по единице, необходимо придем к таким двум последовательным целым числам C и $C+1$, что

$$C < \alpha < C + 1.$$

При этом число C может оказаться положительным, отрицательным или нулем.

Далее, если разделить промежуток между C и $C+1$ на десять равных частей числами

$$C,\ 1;\ C,\ 2;\ \ldots;\ C,\ 9,$$

то α попадет в один (и только в один) из частичных промежутков, и мы придем к двум числам, разнящимся на $\frac{1}{10}$: $C,\ c_1$ и $C,\ c_1+\frac{1}{10}$, для которых

$$C,c_1 < \alpha < C,c_1+\frac{1}{10}.$$

Продолжая этот процесс дальше, после определения $n-1$ цифр $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, мы n-ю цифру c_n определим неравенствами

$$C,\ c_1c_2\ldots c_n < \alpha < C,\ c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}. \qquad (1)$$

Таким образом, в процессе нахождения десятичных приближений числа α мы построили целое число C и бесконечный ряд цифр $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$. Составленную из них *бесконечную десятичную дробь, т. е. символ*

$$C,c_1c_2\ldots c_n\ldots,$$

можно рассматривать как представление вещественного числа α.

В исключенном случае, когда α само является целым числом или, вообще, конечной десятичной дробью, можно подобным же образом последовательно определить число C и цифры $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, но лишь исходя из более общих чем (1) соотношений

$$C,c_1c_2\ldots c_n \leqslant \alpha \leqslant C,c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}. \qquad (1a)$$

Дело в том, что в некий момент число α совпадет с одним из концов промежутка, в который мы его заключаем, с левым или с правым — по нашему произволу; начиная с этого момента, соответственно, слева или справа в (1a) уже постоянно будет иметь место равенство. Смотря по тому, какая из этих возможностей осуществляется, последующие цифры окажутся все нулями или все девятками. Таким образом, на этот раз число α имеет двоякое представление: одно — с нулем в периоде, а другое — с девяткой в периоде, например,

$$2{,}718 = 2{,}718000\ldots = 2{,}717999\ldots,$$

$$-2{,}718 = \bar{3},282 = \bar{3},282000\ldots = \bar{3},281999\ldots$$

Разность между десятичными приближениями

$$C,c_1c_2\ldots c_n \quad \text{и} \quad C,c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}$$

по избытку и по недостатку, равная $\frac{1}{10^n}$, с возрастанием n может быть сделана меньшей любого рационального числа $e > 0$. Действительно, так как натуральных чисел, не превосходящих числа $\frac{1}{e}$, существует лишь конечное число, то неравенство $10^n \leqslant \frac{1}{e}$, или равносильное ему $\frac{1}{10^n} \geqslant e$, может выполняться лишь для конечного числа значений n; для всех же остальных будет

$$\frac{1}{10^n} < e.$$

Это замечание, ввиду леммы 2, позволяет заключить, что число β, отличное от α, не может удовлетворять всем тем же неравенствам (1) или (1а), что и α, и, следовательно, имеет представление в виде бесконечной десятичной дроби, отличное от представления числа α.

Отсюда, в частности, явствует, что представление числа, не равного никакой конечной десятичной дроби, не имеет ни нуля, ни девятки в периоде — поскольку каждая дробь с нулем или девяткой в периоде явно выражает конечную десятичную дробь.

Можно доказать, что, если взять по произволу бесконечную дробь (2), то существует вещественное число α, для которого именно дробь (2) служит представлением. Очевидно, достаточно построить число α так, чтобы выполнялись все неравенства (1а). С этой целью, вводя для краткости обозначения

$$C_n = C, c_1 c_2 \ldots c_n \quad \text{и} \quad C'_n = C, c_1 c_2 \ldots c_n + \frac{1}{10^n},$$

заметим, что каждая дробь C_n меньше каждой дроби C'_m (не только при $m = n$, но и при $m \gtrless n$). Произведем теперь сечение в области рациональных чисел: к верхнему классу A' отнесем такие рациональные числа a', которые больше всех C_n (например, все числа C'_m), а к нижнему A — все остальные (например, сами числа C_n). Легко проверить, что это действительно сечение; оно определяет вещественное число α, которое и будет искомым.

Действительно, так как α является пограничным числом между двумя классами, то, в частности,

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n.$$

Отныне читатель может представлять себе вещественные числа как бесконечные десятичные дроби. Из школьного курса известно, что периодическая бесконечная дробь изображает рациональное число и, обратно, каждое рациональное число разлагается именно в периодическую дробь. Таким образом, изображениями вновь введенных нами иррациональных чисел служат непериодические

бесконечные дроби. Это представление также может быть отправной точкой для построения теории иррациональных чисел.

Замечание. В последующем нам придется пользоваться приближенными рациональными значениями a и a' к вещественному числу α:

$$a < \alpha < a',$$

разность которых меньше произвольно малого рационального числа $e > 0$. Для рационального α существование чисел a и a' очевидно; для иррационального же α в качестве a и a' можно было бы, например, использовать десятичные приближения C_n и C'_n при достаточно большом n.

5. Непрерывность множества вещественных чисел. Обратимся теперь к рассмотрению одного весьма важного свойства множества всех вещественных чисел, которое его существенно отличает от множества чисел рациональных. Рассматривая сечения в множестве рациональных чисел, мы видели, что иной раз для такого сечения в этом множестве не находилось пограничного числа, про которое можно было бы сказать, что оно производит сечение. Именно эта неполнота множества рациональных чисел, наличие в ней этих пробелов и послужили основанием для введения новых чисел — иррациональных. Станем теперь рассматривать сечения в множестве всех вещественных чисел. Под таким сечением мы понимаем разбиение этого множества на два непустых множества A, A', при котором:

1°. *Каждое вещественное число попадает в одно и только одно из множеств* A, A' и, сверх того:

2°. *Каждое число* α *множества* A *меньше каждого числа* α' *множества* A'.

Возникает вопрос: всегда ли для такого сечения найдется — в множестве вещественных чисел — пограничное число, производящее это сечение, или и в этом множестве существуют пробелы (которые могли бы послужить основанием для введения еще новых чисел)?

Оказывается, что на деле таких пробелов уже нет.

Основная теорема (Дедекинда). *Для всякого сечения* $A \mid A'$ *в множестве вещественных чисел существует вещественное число* β, *которое производит это сечение. Это число* β *будет*: 1) *либо наибольшим в нижнем классе* A, 2) *либо наименьшим в верхнем классе* A'.

Это свойство множества вещественных чисел называют его полнотой, а также — непрерывностью или сплошностью.

Доказательство. Обозначим через A множество всех рациональных чисел, принадлежащих к A, а через A' — множество всех рациональных чисел, принадлежащих A'. Легко убедиться, что множества A и A' образуют сечение в множестве всех рациональных чисел.

Это сечение $A|A'$ определяет некоторое вещественное число β. Оно должно попасть в один из классов A, A'; предположим, что β попадает, например, в нижний класс A, и докажем, что тогда осуществляется случай 1), а именно, β является в классе A наибольшим. В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы другое число α_0 этого класса, бо́льшее β. Вставим (опираясь на лемму 1) между α_0 и β рациональное число r:

$$\alpha_0 > r > \beta.$$

r принадлежит классу A, а следовательно, также и классу A. Мы пришли к противоречию: рациональное число r, принадлежащее нижнему классу сечения, определяющего число β, больше этого числа! Этим доказано наше утверждение.

Аналогичное рассуждение показывает, что если β попадает в верхний класс A', то осуществится случай 2).

Замечание. Одновременное существование в классе A наибольшего числа и в классе A' наименьшего — невозможно; это устанавливается так же, как и для сечений в области рациональных чисел (с помощью леммы 1).

6. Границы числовых множеств. Мы используем основную теорему [5], чтобы здесь же установить некоторые понятия, играющие важную роль в современном анализе. Они понадобятся нам уже при рассмотрении арифметических действий над вещественными числами.

Представим себе произвольное бесконечное множество*) вещественных чисел; оно может быть задано любым образом. Такими множествами являются, например, множество натуральных чисел, множество всех правильных дробей, множество всех вещественных чисел между числами 0 и 1, множество корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и т. п.

Любое из чисел множества обозначим через x, так что x есть типовое обозначение чисел множества; само же множество чисел x будем обозначать через $\mathscr{X} = \{x\}$.

Если для рассматриваемого множества $\{x\}$ существует такое число M, что все $x \leqslant M$, то будем говорить, что наше множество ограничено сверху (числом M); само число M в этом случае есть верхняя граница множества $\{x\}$. Например, множество правильных дробей ограничено сверху числом единица или любым числом большим единицы; натуральный ряд сверху не ограничен.

Аналогично этому: если найдется такое число m, что все $x \geqslant m$, то говорят, что множество $\{x\}$ ограничено снизу (числом m), а само число m называют нижней границей множества $\{x\}$. Например, натуральный ряд ограничен снизу числом 1 или любым

---

*) Все сказанное ниже сохраняет силу и для конечных множеств, но этот случай не представляет интереса.

числом, меньшим его; множество правильных дробей ограничено снизу числом 0 или любым отрицательным числом.

Ограниченное сверху (снизу) множество может быть при этом ограничено и снизу (сверху) или нет. Так, множество правильных дробей ограничено и сверху и снизу, а натуральный ряд ограничен снизу, но не ограничен сверху.

Если множество сверху (снизу) не ограничено, то за его верхнюю (нижнюю) границу принимают «несобственное число» $+\infty$ $(-\infty)$. Знаки $+\infty$ и $-\infty$ читаются так: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность». Относительно этих «несобственных» или «бесконечных» чисел мы считаем, что

$$-\infty < +\infty \quad \text{и} \quad -\infty < \alpha < +\infty,$$

каково бы ни было вещественное («конечное») число α.

Если множество ограничено сверху, т. е. имеет конечную верхнюю границу M, то одновременно оно имеет и бесконечное множество верхних границ (так как, например, любое число, большее M, очевидно, также будет верхней границей). Из всех верхних границ особый интерес представляет наименьшая, которую мы будем называть *точной верхней границей*. Аналогично, если множество ограничено снизу, то наибольшую из всех нижних границ будем называть *точной нижней границей*. Так, для множества всех правильных дробей точными границами будут, соответственно, числа 0 и 1.

Является вопрос: всегда ли для ограниченного сверху (снизу) множества существует точная верхняя (нижняя) граница? Действительно, так как верхних (нижних) границ в этом случае бесконечное множество, а среди бесконечного множества чисел не всегда найдется наименьшее или наибольшее*), то самое существование такого наименьшего (наибольшего) числа из всех верхних (нижних) границ рассматриваемого множества требует доказательства.

Теорема. *Если множество $\mathscr{X} = \{x\}$ ограничено сверху (снизу), то оно имеет и точную верхнюю (нижнюю) границу**).*

Доказательство. Проведем рассуждение по отношению к верхней границе. Рассмотрим два случая:

1°. Предположим сначала, что среди чисел x множества $\mathscr{X}$ найдется наибольшее $\bar{x}$. Тогда все числа множества будут удовлетворять неравенству $x \leqslant \bar{x}$, т. е. $\bar{x}$ будет верхней границей для $\mathscr{X}$. С другой стороны, $\bar{x}$ принадлежит $\mathscr{X}$; следовательно, для

*) Как их нет, например, среди всех правильных дробей.

**) Эту теорему — лишь в других терминах — впервые в 1817 г. высказал чешский философ и математик Бернгард Больцано (1781—1848). Строгое доказательство ее стало возможным лишь после уточнения понятия вещественного числа.

любой верхней границы M выполняется неравенство $\overline{x} \leqslant M$. Отсюда заключаем, что $\overline{x}$ есть точная верхняя граница множества $\mathscr{X}$.

2. Пусть теперь среди чисел x множества $\mathscr{X}$ нет наибольшего. Произведем сечение в области всех вещественных чисел следующим образом. К верхнему классу A' отнесем все верхние границы α' множества $\mathscr{X}$, а к нижнему классу A — все остальные вещественные числа α. При этом разбиении все числа x множества $\mathscr{X}$ попадут в класс A, ибо ни одно из них — по допущению — не будет наибольшим. Таким образом, оба класса A, A' непусты. Это разбиение действительно является сечением, так как все вещественные числа распределены по классам, и каждое число из класса A' больше любого числа из класса A. По основной теореме Дедекинда [5], должно существовать вещественное число β, производящее сечение. Все числа x, как принадлежащие классу A, не превосходят этого «пограничного» числа β, т. е. β служит верхней границей для x, следовательно, само принадлежит классу A' и является там наименьшим. Таким образом, β как наименьшая из всех верхних границ и есть искомая точная верхняя граница множества $\mathscr{X} = \{x\}$.

Совершенно так же доказывается и вторая половина теоремы (относящаяся к существованию точной нижней границы).

Если M^* есть точная верхняя граница числового множества $\mathscr{X} = \{x\}$, то для всех x будет

$$x \leqslant M^*.$$

Возьмем теперь произвольное число α, меньшее M^*. Так как M^* — наименьшая из верхних границ, то число α наверное не будет верхней границей для множества $\mathscr{X}$, т. е. найдется такое число x' из $\mathscr{X}$, что

$$x' > \alpha.$$

Этими двумя неравенствами вполне характеризуется точная верхняя граница M^* множества $\mathscr{X}$.

Аналогично, точная нижняя граница m^* множества $\mathscr{X}$ характеризуется тем, что для всех x

$$x \geqslant m^*,$$

и, каково бы ни было число β, бо́льшее m^*, найдется число x'' из $\mathscr{X}$ такое, что

$$x'' < \beta.$$

Для обозначения точной верхней границы M^* и точной нижней границы m^* множества чисел $\mathscr{X}$ употребляют символы

$$M^* = \sup \mathscr{X} = \sup \{x\}, \quad m^* = \inf \mathscr{X} = \inf \{x\}$$

(по латыни: supremum = наивысшее, infimum = наинизшее).

Отметим одно очевидное умозаключение, которое часто будет встречаться в дальнейшем:

если все числа x некоторого множества удовлетворяют неравенству $x \leqslant M$, то и $\sup\{x\} \leqslant M$.

Действительно, число M оказывается одной из верхних границ множества, а потому наименьшая из всех верхних границ его не превосходит.

Аналогично, *из неравенства $x \geqslant m$ следует, что и* $\inf\{x\} \geqslant m$.

Условимся, наконец, если множество $\mathscr{X} = \{x\}$ не ограничено сверху, говорить, что его точная верхняя граница есть $+\infty$: $\sup\{x\} = +\infty$. Аналогично, если множество $\mathscr{X} = \{x\}$ не ограничено снизу, то говорят, что его точная нижняя граница есть $-\infty$: $\inf\{x\} = -\infty$.

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

7. Определение и свойства суммы вещественных чисел. Пусть имеем два вещественных числа α и β. Станем рассматривать рациональные числа a, a' и b, b', удовлетворяющие неравенствам:

$$a < \alpha < a', \quad b < \beta < b'. \tag{1}$$

Суммой $\alpha + \beta$ *чисел* α *и* β *назовем такое вещественное число* γ, *которое содержится между всеми суммами вида* $a + b$, *с одной стороны, и всеми суммами вида* $a' + b'$ — *с другой*:

$$a + b < \gamma < a' + b'. \tag{2}$$

Удостоверимся, прежде всего, что такое число γ существует для любой пары вещественных чисел α, β.

Рассмотрим множество всевозможных сумм $a + b$. Это множество ограничено сверху, например, любой суммой вида $a' + b'$. Положим же [6]

$$\gamma = \sup\{a + b\}.$$

Тогда $a + b \leqslant \gamma$ и, в то же время, $\gamma \leqslant a' + b'$.

Так как, каковы бы ни были рациональные числа a, b, a', b', удовлетворяющие условиям (1), всегда можно числа a, b увеличить, а числа a', b' уменьшить с сохранением этих условий, то в полученных только что неравенствах, соединенных с равенствами, на деле ни в одном случае равенства быть не может. Таким образом, число γ удовлетворяет определению суммы.

Возникает, однако, вопрос, однозначно ли сумма $\gamma = \alpha + \beta$ определяется неравенствами (2). Для того, чтобы убедиться в единственности суммы, подберем (по замечанию в п°4) рациональные числа a, a', b, b' так, чтобы было

$$a' - a < e \quad \text{и} \quad b' - b < e,$$

где e — произвольно малое рациональное положительное число. Отсюда

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < 2e,$$

т. е. и эта разность может быть сделана сколь угодно малой*). А тогда, по лемме 2, существует только одно число, содержащееся между суммами $a + b$ и $a' + b'$.

*) Число $2e$ становится меньше любого числа $e' > 0$, если взять $e < \frac{e'}{2}$.

Наконец, заметим, что если числа α и β оба рациональны, то их обычная сумма $\gamma = \alpha + \beta$, очевидно, удовлетворяет неравенствам (2). Таким образом, данное выше общее определение суммы двух вещественных чисел не противоречит старому определению суммы двух рациональных чисел.

Для вещественных чисел сохраняются все основные свойства сложения:

$$1)\ \alpha + \beta = \beta + \alpha,\quad 2)\ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),\quad 3)\ \alpha + 0 = \alpha$$

и, наконец,

$$4)\ \textit{из}\ \alpha > \beta\ \textit{следует}\ \alpha + \gamma > \beta + \gamma.$$

Их нетрудно доказать, опираясь на определение суммы, данное выше, и, разумеется, на известные свойства рациональных чисел; останавливаться на этом не будем. С помощью последнего свойства оправдывается почленное складывание двух неравенств.

8. Симметричные числа. Абсолютная величина. Докажем теперь, что *для каждого вещественного числа α существует* (*симметричное ему*) *число* $-\alpha$, *удовлетворяющее условию* $\alpha + (-\alpha) = 0$.

При этом достаточно ограничиться случаем иррационального числа α.

Предполагая, что число α определяется сечением $A|A'$, мы определим число $-\alpha$ следующим образом. К нижнему классу $\overline{A}$ числа $-\alpha$ мы отнесем все рациональные числа $-a'$, где a' — любое число класса A', а к верхнему классу $\overline{A}'$ этого числа отнесем все числа $-a$, где a — любое число класса A. Нетрудно видеть, что построенное разбиение есть сечение и, действительно, определяет вещественное (в данном случае — иррациональное) число; это число обозначим $-\alpha$.

Установим теперь, что оно удовлетворяет указанному выше условию. Пользуясь самим определением числа $-\alpha$, видим, что сумма $\alpha + (-\alpha)$ есть вещественное число, заключенное между числами вида $a - a'$ и $a' - a$, где a и a' рациональны и $a < \alpha < a'$. Но, очевидно,

$$a - a' < 0 < a' - a,$$

так что и число 0 заключено между только что упомянутыми числами. Ввиду единственности числа, обладающего этим свойством, имеем

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Добавим к этому, что число, симметричное данному числу, единственно и обладает свойствами

$$-(-\alpha) = \alpha, \quad -(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta).$$

С помощью понятия симметричного числа исчерпывается вопрос о вычитании вещественных чисел, как о действии, обратном сложению. Назовем разностью α и β (и будем обозначать через $\alpha - \beta$) число γ, удовлетворяющее условию

$$\gamma + \beta = \alpha \quad (\text{или } \beta + \gamma = \alpha).$$

Опираясь на свойства сложения, легко показать, что таким числом будет $\gamma = \alpha + (-\beta)$; действительно,

$$\gamma + \beta = [\alpha + (-\beta)] + \beta = \alpha + [(-\beta) + \beta] = \\ = \alpha + [\beta + (-\beta)] = \alpha + 0 = \alpha.$$

Так же устанавливается и единственность разности.

Свойство 4) из n°7 позволяет теперь сделать полезное замечание о *равносильности* неравенств

$$\alpha > \beta \quad \text{и} \quad \alpha - \beta > 0,$$

а это дает возможность установить, что $\alpha > \beta$ влечет за собой $-\alpha < -\beta$.

Наконец, с понятием симметричного числа связано и понятие *абсолютной величины* числа. Из самого построения симметричного числа явствует, что при $\alpha > 0$ необходимо будет $-\alpha < 0$, а из $\alpha < 0$ следует $-\alpha > 0$. Иными словами, если только $\alpha \neq 0$, то из двух чисел α и $-\alpha$ одно (и только одно) будет больше нуля; его именно и называют *абсолютной величиной* как числа α, так и числа $-\alpha$, и обозначают символом

$$|\alpha| = |-\alpha|.$$

Абсолютную величину числа нуль полагают равной нулю: $|0| = 0$.

Сделаем в интересах дальнейшего еще два замечания об абсолютных величинах.

Прежде всего, установим, что неравенство $|\alpha| < \beta$ (где, конечно, $\beta > 0$) равносильно двойному неравенству: $-\beta < \alpha < \beta$.

Действительно, из $|\alpha| < \beta$ следует, что одновременно $\alpha < \beta$ и $-\alpha < \beta$, т. е. $\alpha > -\beta$. Обратно, если дано, что $\alpha < \beta$ и $\alpha > -\beta$, то имеем одновременно: $\alpha < \beta$ и $-\alpha < \beta$; но одно из этих чисел α, $-\alpha$ и есть $|\alpha|$, так что наверное $|\alpha| < \beta$.

Аналогично, оказываются равносильными и неравенства

$$|\alpha| \leqslant \beta \quad \text{и} \quad -\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta.$$

Докажем, далее, полезное неравенство

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Складывая почленно очевидные неравенства

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \quad \text{и} \quad -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|,$$

получим

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leqslant \alpha + \beta \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

откуда, в силу сделанного выше замечания, и вытекает требуемое неравенство.

Доказанное неравенство с помощью математической индукции распространяется на случай любого числа слагаемых. Кроме того, из него легко получается

$$|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|,$$

а также

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha - \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Так как одновременно и

$$|\beta| - |\alpha| \leqslant |\alpha - \beta|,$$

то, очевидно,

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqslant |\alpha - \beta|.$$

Все эти неравенства не раз будут полезны впоследствии.

9. Определение и свойства произведения вещественных чисел. Перейдем к *умножению* вещественных чисел, ограничиваясь сначала *положительными* числами. Пусть даны два таких числа α и β. Мы здесь также станем рассматривать всевозможные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам (1), но и эти числа предположим *положительными*.

Произведением $\alpha\beta$ *двух положительных вещественных чисел* α и β *назовем такое вещественное число* γ, *которое содержится между всеми произведениями вида* ab, *с одной стороны, и всеми произведениями вида* $a'b'$, — *с другой:*

$$ab < \gamma < a'b'. \tag{3}$$

Для доказательства существования такого числа γ возьмем множество всевозможных произведений ab; оно ограничено сверху любым из произведений вида $a'b'$. Если положить

$$\gamma = \sup\{ab\},$$

то, конечно, $ab \leqslant \gamma$, но одновременно и $\gamma \leqslant a'b'$.

Возможность увеличить числа a, b и уменьшить числа a', b' (как и в случае суммы) позволяет исключить здесь знак равенства, так что число γ удовлетворяет определению произведения.

Единственность произведения вытекает из следующих соображений. Подберем рациональные числа a, a' и b, b' так, чтобы было (см. n° 4, замечание)

$$a' - a < e \quad \text{и} \quad b' - b < e,$$

где e — произвольно малое рациональное положительное число. При этом можно считать, что числа a и b положительны, а числа a' и b' не превосходят, соответственно, некоторых наперед фиксированных чисел a'_0 и b'_0. Тогда разность

$$a'b' - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < (a'_0 + b'_0)e,$$

т. е. также может быть сделана сколь угодно малой*), а этого, по лемме 2, достаточно для утверждения, что неравенствам (3) может удовлетворять только одно число γ.

Если положительные числа α и β оба рациональны, то их обычное произведение $\alpha\beta$ удовлетворяет, очевидно, неравенствам (3), т. е. получается таким же и по общему определению произведения двух вещественных чисел — противоречия нет.

Наконец, для того, чтобы определить произведение произвольной пары вещественных чисел (не обязательно положительных), заключим следующие соглашения.

Прежде всего условимся, что

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$$

каково бы ни было α.

Если же оба множителя отличны от нуля, то положим в основу обычное «правило знаков»:

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ одного знака,}$$

$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ разных знаков}$$

(что означает произведение положительных чисел $|\alpha|$ и $|\beta|$ — мы уже знаем).

---

[1]) Заметим, что $(a'_0 + b'_0)e$ становится меньшим любого числа $e' > 0$, если взять $e < \dfrac{e'}{a'_0 + b'_0}$.

Как и в случае рациональных чисел, для любых вещественных чисел сохраняются свойства

$$1)\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha,\quad 2)\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma),\quad 3)\ \alpha\cdot 1=\alpha,$$
$$4)\ (\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma,$$

а также

5) *из* $\alpha>\beta$ *и* $\gamma>0$ *следует* $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$.

С помощью последнего свойства оправдывается почленное умножение двух неравенств с положительными членами.

Если определить частное $\frac{\alpha}{\beta}$ чисел α и β как такое число γ, которое удовлетворяет условию

$$\gamma\cdot\beta=\alpha\quad(\text{или } \beta\cdot\gamma=\alpha),$$

то можно установить существование и единственность частного, *лишь бы только делитель* β *был отличен от нуля.*

Заканчивая этим обзор арифметических действий над вещественными числами, мы еще раз подчеркнем, что все основные свойства рациональных чисел, на которых строится элементарная алгебра, имеют место и для вещественных чисел. Следовательно, *для вещественных чисел сохраняют силу все правила алгебры, относящиеся к арифметическим действиям и к сочетанию равенств и неравенств.*

§ 3. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

10. Существование корня. Степень с рациональным показателем. Определение умножения (и деления) вещественных чисел непосредственно приводит, как и обычно, к определению степени с целым положительным (и отрицательным) показателем. Переходя к степени с вообще рациональным показателем, остановимся прежде всего на вопросе о существовании корня.

Как мы помним, отсутствие в области рациональных чисел простейших корней послужило одним из поводов к расширению этой области; проверим же, в какой мере произведенное расширение заполнило старые пробелы (не создав при этом новых).

Пусть α — любое вещественное число, n — натуральное число.

Как известно, корнем n-й степени из числа α называют такое вещественное число ξ, что

$$\xi^n=\alpha.$$

Мы ограничимся случаем, когда α положительно, и будем искать положительное же ξ, удовлетворяющее этому соотношению, т. е. так называемое арифметическое значение корня. Мы докажем, что такое число ξ всегда существует, и притом только одно.

Последнее утверждение относительно единственности числа ξ, впрочем, сразу следует из того, что разным положительным числам соответствуют и разные степени их: если $0<\xi<\xi'$, то $\xi^n<\xi'^n$.

Если существует такое положительное рациональное число r, n-я степень которого равна α, то оно и будет искомым числом ξ. Поэтому впредь достаточно ограничиться предположением, что такого рационального числа нет.

Построим теперь сечение $X|X'$ в области всех рациональных чисел следующим образом. К классу X отнесем все отрицательные рациональные числа и нуль, а также те из положительных рациональных чисел x, для которых $x^n<\alpha$. К классу X' отнесем положительные рациональные числа x', для которых $x'^n>\alpha$.

Легко видеть, что классы эти не пустые и что X содержит и положительные числа. Если взять, например, натуральное число m так, чтобы было $\frac{1}{m} < \alpha < m$, то и подавно $\frac{1}{m^n} < \alpha < m^n$, так что число $\frac{1}{m}$ входит в X, а число m — в X'.

Прочие требования, предъявляемые к сечению, проверяются непосредственно.

Пусть теперь ξ будет число, определяемое сечением $X \mid X'$; докажем, что $\xi^n = \alpha$, т. е. что $\xi = \sqrt[n]{\alpha}$.

Рассматривая ξ^n как произведение n сомножителей, равных ξ, на основании определения произведения положительных вещественных чисел заключаем, что, если x и x' суть рациональные числа, для которых

$$0 < x < \xi < x',$$

то

$$x^n < \xi^n < x'^n.$$

Так как, очевидно, x принадлежит классу X, а x' — классу X', то, по определению этих классов, одновременно и

$$x^n < \alpha < x'^n.$$

Но разность $x' - x$ может быть сделана меньшей любого числа $e > 0$ (п° 4, замечание), причем ничто не мешает считать x' меньшим некоторого наперед фиксированного числа x'_0. В таком случае разность

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x \cdot x'^{n-2} + \ldots + x^{n-1}) < e \cdot n x'^{n-1}_0,$$

т. е. также может быть сделана сколь угодно малой*). Отсюда, по лемме 2, и следует равенство чисел ξ^n и α.

После того как доказано существование корня, обычным путем устанавливается понятие степени с любым *рациональным* показателем r и проверяется, что для таких степеней справедливы обычные правила, выводимые в курсе элементарной алгебры:

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \quad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$
$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r \cdot r'} \qquad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r} \text{ и др.}$$

Подчеркнем еще, что при $\alpha > 1$ степень α^r *возрастает* с возрастанием рационального показателя r.

11. Степень с любым вещественным показателем. Обратимся к определению *степени любого вещественного (положительного) числа* α *с любым вещественным показателем* β.

Введем в рассмотрение степени числа α

$$\alpha^b \text{ и } \alpha^{b'}$$

с рациональными показателями b и b', удовлетворяющими неравенствам

$$b < \beta < b'.$$

---

*) Заметим, что число $e \cdot n x'^{n-1}_0$ становится меньшим любого числа $e' > 0$, если взять $e < \frac{e'}{n x'^{n-1}_0}$.

Степенью числа $a > 1$ *) *с показателем* β *называют (и обозначают символом* a^β*) вещественное число* γ, *содержащееся между степенями* a^b *и* $a^{b'}$:

$$a^b < \gamma < a^{b'}. \tag{1}$$

Легко убедиться в том, что такое число всегда существует. Действительно, множество степеней $\{a^b\}$ ограничено сверху, например, любой степенью $a^{b'}$. Возьмем тогда [6]

$$\gamma = \sup_{b < \beta} \{a^b\}.$$

Для этого числа будем иметь

$$a^b \leqslant \gamma \leqslant a^{b'}.$$

На деле же знак равенства здесь не нужен, ввиду возможности увеличить b и уменьшить b', так что построенное число γ удовлетворяет условиям (1).

Обратимся теперь к доказательству единственности числа, определяемого этими условиями.

Для этого, прежде всего, заметим, что лемма 2 n° **3** сохраняет свою силу и в том случае, если опустить требование, чтобы числа s, s' и e были непременно рациональными; доказательство остается то же.

Затем установим одно весьма простое, но часто полезное неравенство: если n — натуральное число, большее единицы, и $\gamma > 1$, то

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1). \tag{2}$$

Действительно, положив $\gamma = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$, по формуле бинома Ньютона будем иметь

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \ldots;$$

так как ненаписанные члены положительны, то

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

что равносильно неравенству (2).

Положив в этом неравенстве $\gamma = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 1)$, получим неравенство

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}, \tag{3}$$

которым мы сейчас и воспользуемся.

Мы знаем (n° 4, замечание), что числа b и b' можно выбрать так, чтобы разность $b' - b$ была меньше $\frac{1}{n}$ при любом наперед заданном натуральном n; тогда, по неравенству (3),

$$a^{b'} - a^b = a^b(a^{b'-b} - 1) < a^b(a^{\frac{1}{n}} - 1) < a^b \cdot \frac{a-1}{n};$$

окончательно, если через b'_0 обозначить какое-либо из чисел b',

$$a^{b'} - a^b < a^{b'_0} \cdot \frac{a-1}{n}.$$

*) Этим случаем можно ограничиться: при $a < 1$ полагаем, например, $a^\beta = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\beta}$.

Последнее выражение за счет n может быть сделано меньшим произвольно малого положительного числа ε: для этого достаточно взять

$$n > \frac{\alpha^{b'_0}(\alpha - 1)}{\varepsilon}.$$

В таком случае, по обобщенной выше лемме 2, между границами α^b и $\alpha^{b'}$ не может содержаться двух различных чисел γ.

Если β рационально, то данное выше определение возвращает нас к обычному пониманию символа α^β.

Легко проверить, что для степени с любым вещественным показателем выполняются все обычные для степени правила, а также, что при $\alpha > 1$ степень α^β возрастает с возрастанием вещественного показателя β.

12. Логарифмы. Пользуясь данным определением степени с любым вещественным показателем, теперь легко установить существование логарифма для любого положительного вещественного числа γ при положительном основании α, отличном от единицы (мы будем, например, считать $\alpha > 1$).

Если существует такое рациональное число r, что

$$\alpha^r = \gamma,$$

то r и есть искомый логарифм. Предположим же, что такого рационального числа r нет.

Тогда можно произвести сечение $B \mid B'$ в области всех рациональных чисел по следующему правилу. К классу B отнесем рациональные числа b, для которых $\alpha^b < \gamma$, а к классу B' — рациональные числа b', для которых $\alpha^{b'} > \gamma$.

Покажем, что классы B и B' — не пустые. В силу неравенства (2)

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1),$$

и достаточно взять

$$n > \frac{\gamma}{\alpha - 1},$$

чтобы было $\alpha^n > \gamma$; такое натуральное число n относится к классу B'. В то же время имеем:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{n(\alpha - 1)}.$$

и достаточно взять

$$n > \frac{1}{\gamma(\alpha - 1)},$$

чтобы было $\alpha^{-n} < \gamma$ и число $-n$ попало в класс B.

Остальные требования, предъявляемые к сечению, здесь также выполнены.

Построенное сечение $B \mid B'$ определяет вещественное число β, которое является «пограничным» между числами обоих классов. По определению степени имеем

$$\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{b'} \quad (b < \beta < b'),$$

причем α^β есть единственное число, удовлетворяющее всем подобным неравенствам. Но для числа γ имеем (по самому построению сечения)

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}.$$

Следовательно,

$$\alpha^\beta = \gamma \quad \text{и} \quad \beta = \log_\alpha \gamma;$$

существование логарифма доказано.

13. Измерение отрезков. Невозможность снабдить, оставаясь в множестве рациональных чисел, все отрезки длинами также была важнейшим поводом к введению иррациональных чисел. Покажем теперь, что произведенного расширения понятия числа достаточно для решения задачи измерения отрезков.

Прежде всего сформулируем самую задачу.

Требуется с каждым прямолинейным отрезком A связать некоторое положительное вещественное число $l(A)$, которое будем называть «длиной отрезка A», так, чтобы

1) *некоторый наперед выбранный отрезок E («эталон длины») имел длину единица:* $l(E) = 1$;

2) *равные отрезки имели одну и ту же длину;*

3) *при сложении отрезков длина суммы всегда была равна сумме длин складываемых отрезков*:

$$l(A+B) = l(A) + l(B)$$

(«свойство аддитивности»).

Поставленные условия приводят к однозначному решению задачи.

Из 2) и 3) следует, что q-я часть эталона должна иметь длину $\frac{1}{q}$; если же эта часть повторена слагаемым p раз, то полученный отрезок, в силу 3), должен иметь длину $\frac{p}{q}$. Таким образом, если отрезок A соизмерим с эталоном длины и общая мера отрезков A и E укладывается в них, соответственно, p и q раз, то необходимо

$$l(A) = \frac{p}{q}.$$

Легко видеть, что это число не зависит от взятой общей меры и что, если отрезкам, соизмеримым с эталоном, приписать рациональные длины по этому правилу, то (для этих отрезков) задача измерения будет полностью решена.

Обращаясь к общему случаю, заметим, что если отрезок A больше отрезка B, так что $A = B + C$, где C есть также некоторый отрезок, то, в силу 3), должно быть:

$$l(A) = l(B) + l(C)$$

и, так как $l(C) > 0$, то $l(A) > l(B)$. Итак, неравные отрезки должны иметь неравные длины, а именно, больший отрезок — бо́льшую длину.

Так как каждое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ является длиной некоторого отрезка, соизмеримого с эталоном длины E, то из сказанного, между прочим, ясно, что ни один отрезок, несоизмеримый с эталоном, не может иметь рациональную длину.

Пусть же Σ будет такой отрезок, несоизмеримый с E. Найдется бесчисленное множество отрезков S и S', соизмеримых с E и, соответственно, меньших или больших Σ. Если положить $l(S) = s$, $l(S') = s'$, то искомая длина $l(\Sigma)$ должна удовлетворять неравенствам

$$s < l(\Sigma) < s' \text{*)}.$$

Если распределить все рациональные числа на два класса S и S', отнеся к нижнему классу S числа s (и кроме них — все отрицательные числа и нуль), а к верхнему классу S' — числа s', то получится сечение в множестве рацио-

*) Разумеется, и для длины отрезка Σ, соизмеримого с E, также выполняются эти неравенства.

нальных чисел. Так как в нижнем классе, очевидно, нет наибольшего числа, а в верхнем — наименьшего, то этим сечением определяется иррациональное число σ, которое и будет единственным вещественным числом, удовлетворяющим неравенствам $s < \sigma < s'$. Именно этому числу необходимо положить равной длину $l(\Sigma)$.

Предположим теперь, что всем отрезкам, как соизмеримым с E, так и несоизмеримым, приписаны длины в согласии с указанными правилами. Выполнение условий 1), 2) очевидно.

Рассмотрим два отрезка Р, Σ с длинами

$$\rho = l(\mathrm{P}), \quad \sigma = l(\Sigma)$$

и их сумму $\mathrm{T} = \mathrm{P} + \Sigma$, длину которой обозначим через $\tau = l(\mathrm{T})$. Взяв любые положительные рациональные числа r, r', s, s' такие, что

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s',$$

построим отрезки R, R', S, S', для которых именно эти числа, соответственно, служат длинами. Отрезок $R + S$ (длины $r + s$) будет меньше Т, а отрезок $R' + S'$ (длины $r' + s'$) — больше Т. Поэтому

$$r + s < \tau < r' + s'.$$

Но [7] единственным вещественным числом, содержащимся между числами вида $r + s$ *) и числами $r' + s'$, является сумма $\rho + \sigma$. Следовательно, $\tau = \rho + \sigma$, что и требовалось доказать.

Распространение «свойства аддитивности» на случай любого конечного числа слагаемых производится по методу математической индукции.

Если на оси (направленной прямой) (черт. 1) выбрать начальную точку O и эталон длины E, то *каждой точке X этой прямой отвечает*

Черт. 1.

некоторое вещественное число — ее абсцисса x, равная длине отрезка OX, если X лежит в положительном направлении от O, или этой длине со знаком минус — в противном случае.

Естественно встает вопрос, будет ли верно и обратное: *каждое ли вещественное число x отвечает при этом некоторой точке прямой?* Вопрос этот в геометрии решается в утвердительном смысле, именно с помощью аксиомы о непрерывности прямой, устанавливающей для прямой, как множества точек, свойство, аналогичное свойству непрерывности множества вещественных чисел [n°5].

Таким образом, между всеми вещественными числами и точками направленной прямой (оси) можно установить взаимно однозначное соответствие. Вещественные числа можно изображать точками на оси, которую в связи с этим называют числовой осью. Подобным изображением мы впредь постоянно будем пользоваться.

*) Ограничение положительными числами r и s, конечно, несущественно.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

14. Переменная величина. При исследовании явлений природы и в своей практической деятельности человек сталкивается с множеством различных физических величин; сюда относятся время, длина, объем, скорость, масса, сила и т. п. Каждая из них, в зависимости от условий вопроса, в котором она рассматривается, принимает либо различные значения, либо лишь одно. В первом случае мы имеем дело с переменной величиной, а во втором — с постоянной.

Если выбрать определенную единицу измерения (как мы это делали, например, в n° **13**, говоря о длине), каждое значение величины можно выразить числом. Математика обычно отвлекается от физического смысла рассматриваемых величин, интересуясь лишь именно их численными значениями. Вот что говорит об этом закономерном процессе отвлечения Ф. Энгельс *). Констатируя, что «математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира», Энгельс продолжает далее:

«Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины . . .»

Введение в математику переменной величины — его обычно связывают с именем Декарта — было событием огромной важности. Математика получила возможность не только устанавливать количественные соотношения между постоянными величинами, но и изучать протекающие в природе процессы, в которых участвуют и переменные величины. Ф. Энгельс **) подчеркивает это в следующих словах:

«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и

*) Ф. Энгельс, «Анти-Дюринг», изд. 1952 г., стр. 37.

**) Ф. Энгельс, «Диалектика природы», изд. 1952 г., стр. 206.

диалектика и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление...*»

15. Область изменения переменной величины. В математическом анализе — если только речь не идет об его приложениях — под *переменной величиной* (или короче — *переменной*) разумеется отвлеченная или числовая переменная. Ее обозначают каким-либо символом (буквой, например, x), которому приписываются числовые значения. Переменная x считается заданной, если указано множество $\mathscr{X} = \{x\}$ значений, которые она может принимать. Это множество и называется *областью изменения* переменной x. Вообще, областью изменения переменной может служить любое числовое множество.

Постоянную величину (короче — *постоянную*) удобно рассматривать как частный случай переменной: он отвечает предположению, что множество $\mathscr{X} = \{x\}$ состоит из одного элемента.

Мы видели в n°13, что числа геометрически истолковываются как точки на оси. Область $\mathscr{X}$ изменения переменной x на этой оси изображается в виде некоторого множества точек. В связи с этим обычно сами числовые значения переменной называют точками.

Часто приходится иметь дело с переменной n, принимающей всевозможные натуральные значения

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100,\ 101,\ \ldots;$$

область изменения этой переменной, т. е. множество $\{n\}$ всех натуральных чисел, мы будем всегда обозначать через $\mathscr{N}$.

Однако обычно в анализе изучаются переменные, изменяющиеся, как говорят, непрерывным или сплошным образом: их прообразом являются физические величины — время, путь, проходимый движущейся точкой, и т. п. Областью изменения подобной переменной служит числовой промежуток. Чаще всего это будет конечный промежуток, ограниченный двумя вещественными числами a и b $(a < b)$ — его концами, которые сами могут быть включены в его состав или нет. В зависимости от этого мы будем различать

замкнутый промежуток $[a, b]$: $a \leqslant x \leqslant b$ (оба конца включены);

полуоткрытые промежутки $\begin{cases} (a, b]: & a < x \leqslant b \\ [a, b): & a \leqslant x < b \end{cases}$ (лишь один конец включен);

открытый промежуток (a, b): $a < x < b$ (ни один конец не включен).

Длиной промежутка во всех случаях называется число $b - a$.

Геометрическим аналогом числового промежутка является, как легко понять, отрезок числовой оси, причем — в зависимости от типа промежутка — и к отрезку концы его приключаются или нет.

Приходится рассматривать и бесконечные промежутки, у которых одним из концов или обоими служат «несобственные» числа $-\infty$,

$+\infty$. Обозначения их аналогичны приведенным выше. Например, $(-\infty, +\infty)$ есть множество всех вещественных чисел; $(a, +\infty)$ означает множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$; промежуток $(-\infty, b]$ определяется неравенством $x \leqslant b$. Геометрически бесконечные промежутки изображаются в виде бесконечной в обе стороны прямой или луча.

16. Функциональная зависимость между переменными. Примеры. Предметом изучения в математическом анализе является, однако, не изменение одной переменной самой по себе, а зависимость между двумя или несколькими переменными при их совместном изменении. Здесь мы ограничимся простейшим случаем двух переменных.

В различных областях науки и жизни — в самой математике, в физике, в технике — читатель не раз встречал такие совместно изменяющиеся переменные. Они не могут одновременно принимать любые значения (из своих областей изменения): если одной из них (независимой переменной) придано конкретное значение, то этим уже определяется и значение другой (зависимой переменной, или функции). Приведем несколько примеров.

1) Площадь Q круга есть функция от его радиуса R; ее значение может быть вычислено по заданному значению радиуса с помощью известной формулы

$$Q = \pi R^2.$$

2) В случае свободного падения тяжелой материальной точки — при отсутствии сопротивления — время t (сек.), отсчитываемое от начала движения, и пройденный за это время путь s (*м*) связаны уравнением

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2} есть ускорение силы тяжести. Отсюда и определяется значение s, соответствующее взятому моменту t: путь s является функцией от протекшего времени t.

3) Рассмотрим некоторую массу (идеального) газа, содержащуюся под поршнем цилиндра. В предположении, что температура сохраняется неизменной, объем V (*л*) и давление p (*атм*) этой массы газа подчиняются закону Бойля—Мариотта:

$$pV = c = \text{const}.$$

Если произвольно изменять V, то p как функция от V будет всякий раз однозначно определяться по формуле

$$p = \frac{c}{V}.$$

Заметим тут же, что самый выбор независимой переменной из числа двух рассматриваемых иногда бывает безразличен или связан с соображениями простого удобства. В большинстве же случаев он

диктуется целенаправленностью производимого исследования. Так, в последнем примере мы могли бы быть заинтересованы в зависимости объема V от переменного внешнего давления p на поршень (передающегося газу); тогда ее естественно было бы написать в виде

$$V = \frac{c}{p},$$

считая p независимой переменной, а V — функцией от p.

Функциональная зависимость в иных случаях характеризует процесс, реально протекающий во времени, — особенно, если, как в примере 2), само время является независимой переменной. Однако было бы ошибкой думать, что всегда изменение переменных связано с течением времени. В примере 1), изучая зависимость площади круга от его радиуса, мы не имели перед собой никакого временного процесса.

17. Определение понятия функции. Отвлечемся теперь, как обычно, от физического смысла рассматриваемых величин и дадим точное общее определение понятия ф у н к ц и и — одного из основных понятий математического анализа.

Пусть даны две переменные x и y с областями изменения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Предположим, что по условиям вопроса переменной x может быть приписано произвольное значение из области $\mathscr{X}$ без каких-либо ограничений. Тогда *переменная y называется ф у н к ц и е й от переменной x в области ее изменения $\mathscr{X}$, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из $\mathscr{X}$ ставится в соответствие одно определенное значение y* (из $\mathscr{Y}$).

Независимая переменная x называется также *аргументом* функции.

В этом определении существенны д в а момента: во-первых, указание области $\mathscr{X}$ изменения аргумента x (ее называют также *областью определения* функции) и, во-вторых, установление правила или закона соответствия между значениями x и y. (Область $\mathscr{Y}$ изменения функции y обычно не указывается, поскольку самый закон соответствия уже определяет множество принимаемых функцией значений).

Можно в определении понятия функции стать на более общую точку зрения, допуская, чтобы каждому значению x из $\mathscr{X}$ отвечало не одно, а несколько значений y (и даже бесконечное множество их). В подобных случаях функцию называют м н о г о з н а ч н о й, в отличие от о д н о з н а ч н о й функции, определенной выше. Впрочем, в курсе анализа, стоящем на точке зрения вещественной переменной, избегают многозначных функций, и впредь, говоря о функции, если не оговорено противное, мы будем разуметь о д н о з н а ч н у ю функцию.

Для указания того факта, что y есть функция от x, пишут:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x) \text{ и т. п.*)}$$

*) Произносится эта запись следующим образом: «игрек равно эф от икс», «игрек равно фи от икс» и т. д.

Буквы f, φ, F, ... характеризуют именно то правило, по которому получается значение x, отвечающее заданному y. Поэтому, если одновременно рассматриваются различные функции от одного и того же аргумента x, связанные с различными законами соответствия, их не следует обозначать одной и той же буквой.

Хотя именно буква «эф» (в различных алфавитах) связана со словом «функция», но для обозначения функциональной зависимости, разумеется, может применяться и любая другая буква; иногда даже повторяют ту же букву y: $y = y(x)$. В некоторых случаях пишут аргумент и в виде значка при функции, например, y_x.

Если, рассматривая функцию, скажем, $y = f(x)$, мы хотим отметить ее частное значение, которое отвечает выбранному частному значению x, равному x_0, то для обозначения его употребляют символ: $f(x_0)$. Например, если

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(t) = \frac{10}{t}, \quad h(u) = \sqrt{1-u^2},$$

то $f(1)$ означает численное значение функции $f(x)$ при $x = 1$, т. е. попросту число $\frac{1}{2}$, аналогично, $g(5)$ означает число 2, $h\left(\frac{3}{5}\right)$ — число $\frac{4}{5}$ и т. п.

Обратимся теперь к самому правилу, или зако́ну, соответствия между значениями переменных, которое составляет сущность понятия функциональной зависимости. Правило это может быть весьма разнообразной природы, поскольку оно ничем не было ограничено.

Наиболее просто и естественно осуществление этого правила с помощью формулы, которая представляет функцию в виде аналитического выражения, указывающего те аналитические операции или действия над постоянными числами и над значением x, которые надо произвести, чтобы получить соответствующее значение y. Этот аналитический способ задания функции является наиболее важным для математического анализа (мы еще вернемся к нему в следующем номере). С ним читатель всего лучше знаком из школьного курса математики; наконец, именно аналитическим способом мы пользовались в приведенных в n°**16** примерах.

Однако было бы ошибочным думать, что это — единственный способ, которым может быть задана функция. В самой математике нередки случаи, когда функция определяется без помощи формулы. Такова, например, функция $E(x)$ — «целая часть числа x» *). Легко сообразить, что

$$E(1) = 1, \quad E(2{,}5) = 2, \quad E(\sqrt{13}) = 3, \quad E(-\pi) = -4 \text{ и т. д.},$$

хотя никакой формулы, выражающей $E(x)$, у нас нет.

---

*) Или точнее — наибольшее целое число, не превосходящее x (E есть начальная буква от французского слова entier, обозначающего «целый»).

В естественных науках и в технике зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений. Например, если подвергнуть воду произвольно выбранному давлению p(*атм*), то на опыте можно определить соответствующую ему температуру θ°C кипения воды: θ есть функция от p. Однако эта функциональная зависимость задается не какой-либо формулой, а лишь таблицей, где просто сопоставлены полученные из опыта данные. Примеры табличного способа задания функции легко найти в любом техническом справочнике. Неудобство его заключается в том, что он дает значения функции лишь для некоторых значений аргумента.

Наконец, упомянем еще, что в некоторых случаях — при помощи самопишущих приборов — функциональная зависимость между физическими величинами задается непосредственно графиком. Например, «индикаторная диаграмма», снимаемая при помощи индикатора, дает зависимость между объемом V и давлением p пара в цилиндре работающей паровой машины; «барограмма», доставляемая барографом, представляет суточный ход атмосферного давления, и т. п. Разумеется, такой способ задания позволяет определять значения функции лишь приближенно.

Мы не входим в подробности относительно табличного и графического способов задания функциональной зависимости, так как ими в математическом анализе не приходится пользоваться.

18. Аналитический способ задания функции. Сделаем ряд разъяснительных замечаний в связи со способом задания функции аналитическим выражением или формулой, который играет в математическом анализе исключительно важную роль.

1°. Прежде всего, какие аналитические операции или действия могут входить в эти формулы? На первом месте здесь разумеются все изученные в элементарной алгебре и тригонометрии операции: арифметические действия, возвышения в степень (и извлечение корня), логарифмирование, переход от углов к их тригонометрическим величинам и обратно (см. ниже § 2). Однако, и это важно подчеркнуть, к их числу по мере развития наших сведений по анализу будут присоединяться и другие операции, в первую голову — предельный переход, которому посвящена глава III.

Таким образом, полное содержание термина «аналитическое выражение» или «формула» будет раскрываться лишь постепенно.

2°. Второе замечание относится к области определения функции аналитическим выражением или формулой.

Каждое аналитическое выражение, содержащее аргумент x, имеет, так сказать, естественную область применения: это множество всех тех значений x, для которых оно сохраняет смысл, т. е. имеет *вполне определенное, конечное, вещественное значение*. Разъясним это на простейших примерах.

Так, для выражения $\frac{1}{1+x^2}$ такой областью будет все множество вещественных чисел. Для выражения $\sqrt{1-x^2}$ эта область сведется к замкнутому промежутку $[-1, 1]$, за пределами которого значение его перестает быть вещественным. Напротив, выражению $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ придется в качестве естественной области применения отнести открытый промежуток $(-1, 1)$, ибо на концах его знаменатель обращается в нуль. Иногда область значений, для которых выражение сохраняет смысл, состоит из разрозненных промежутков: для $\sqrt{x^2-1}$ это будут промежутки $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, для $\frac{1}{x^2-1}$ — промежутки $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$, и т. д. *).

В последующем изложении нам придется рассматривать как более сложные, так и более общие аналитические выражения, и мы не раз будем заниматься исследованием свойств функций, задаваемых подобным выражением во всей области, где оно сохраняет смысл, т. е. изучением самого аналитического аппарата.

Однако возможно и другое положение вещей, на что мы считаем нужным заранее обратить внимание читателя. Представим себе, что какой-либо конкретный вопрос, в котором переменная x по существу дела ограничена областью изменения $\mathscr{X}$, привел к рассмотрению функции $f(x)$, допускающей аналитическое выражение. Хотя может случиться, что это выражение имеет смысл и вне области $\mathscr{X}$, выходить за ее пределы, разумеется, все же нельзя. Здесь аналитическое выражение играет подчиненную, вспомогательную роль.

Например, если, исследуя свободное падение тяжелой точки с высоты h над поверхностью Земли, мы прибегнем к формуле

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

[16,2)], то нелепо было бы рассматривать отрицательные значения t или значения t, бóльшие, чем $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ибо, как легко видеть, при $t = T$ точка уже упадет на Землю. И это несмотря на то, что само выражение $\frac{gt^2}{2}$ сохраняет смысл для всех вещественных t.

3°. Может случиться, что функция определяется не одной и той же формулой для всех значений аргумента, но для одних — одной формулой, а для других — другой. Примером такой функции в

*) Для нас, разумеется, не представляют интереса такие выражения, которые ни при одном значении x вообще не имеют смысла.

промежутке $(-\infty, +\infty)$ может служить функция, определяемая следующими тремя формулами:

$$f(x) = 1, \text{ если } |x| > 1 \text{ (т. е. если } x > 1 \text{ или } x < -1),$$
$$f(x) = -1, \text{ если } |x| < 1 \text{ (т. е. если } -1 < x < 1)$$

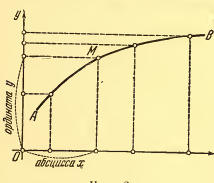
и, наконец,

$$f(x) = 0, \quad \text{если} \quad x = \pm 1.$$

Впрочем, не следует думать, что есть принципиальная разница между функцией, задаваемой одной формулой для всех значений x, и функцией, определение которой использует несколько формул. Обычно функция, задаваемая несколькими формулами (правда, ценой некоторого усложнения выражения), может быть задана и одной. В частности, это справедливо относительно приведенной выше функции [см. n°**43**,5)]. В последующем мы не раз будем встречать примеры того же рода.

19. График функции. Хотя в математическом анализе функции графически не задают, но к графической иллюстрации функции прибегают всегда. Легкая обозримость и наглядность графика делают его незаменимым вспомогательным средством исследования свойств функции.

Пусть в некотором промежутке $\mathscr{X}$ задана функция $y = f(x)$. Представим себе на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат — ось x и ось y. Рассмотрим пару соответствующих значений x и y, где x взято из промежутка $\mathscr{X}$, а $y = f(x)$; образом этой пары на плоскости служит точка $M(x, y)$, с абсциссой x и ординатой y. Совокупность всех таких точек, получающихся при изменении x в пределах своего промежутка, составляет график функции, который и является ее геометрическим образом. Обыкновенно график представляет собой кривую вроде кривой AB на черт. 2. В этих условиях само уравнение $y = f(x)$ называют уравнением кривой AB.

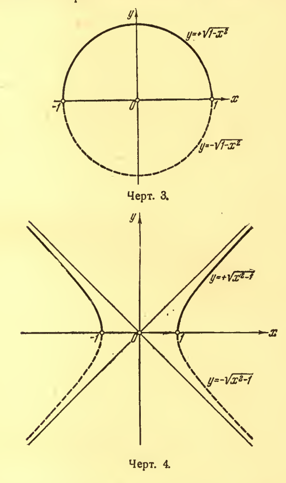


Черт. 2.

Например, на черт. 3 и 4 изображены графики функций

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \quad \text{и} \quad y = \pm\sqrt{x^2 - 1};$$
$$(|x| \leqslant 1) \qquad\qquad (|x| \geqslant 1)$$

читатель узнает в них окружность и равнобочную гиперболу. Много других примеров графического изображения функций читатель найдет в ближайших номерах.



Черт. 4.

Строится график обычно по точкам. Берут в промежутке $\mathscr{X}$ ряд близких между собой значений x, вычисляют по формуле $y=f(x)$ соответствующие значения y:

$$\frac{x = x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_n}{y = y_1 \mid y_2 \mid \ldots \mid y_n}$$

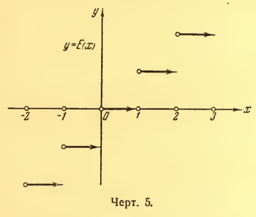
и наносят на чертеж точки

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_n, y_n).$$

Через эти точки от руки или с помощью лекала проводят кривую, которая (конечно, лишь с некоторым приближением) и дает искомый график. Чем плавнее ход графика и чем гуще взяты точки на нем, тем точнее начерченная кривая воспроизводит этот график.

Следует заметить, что хотя геометрический образ функции всегда можно себе «представить», но не всегда этот образ будет кривой в обычном, интуитивном смысле.

Построим, например, график функции $y = E(x)$. Так как в промежутках ..., $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, ...



Черт. 5.

функция сохраняет постоянные значения ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., то график будет состоять из ряда отдельных горизонтальных отрезков, лишенных своих правых концов (черт. 5) *).

20. Функции натурального аргумента. До сих пор мы рассматривали исключительно примеры функций непрерывно изменяющегося аргумента, значения которого заполняли сплошной промежуток. Остановимся теперь на принципиально более простом (но не менее важном) случае функции $f(n)$ аргумента n, пробегающего лишь ряд $\mathcal{N}$ натуральных значений. Функции натурального аргумента будут играть в дальнейшем особую роль.

В обозначении такой функции часто отступают от обычного функционального обозначения и вместо $f(n)$ пишут какую-нибудь букву с указателем n внизу, например, x_n. Если заменить этот указатель (который — напомним это — является здесь независимой переменной) конкретным натуральным числом, например, 1, 23, 518 ..., то x_1, x_{23}, x_{518}, ... будут соответствующими числовыми значениями функции x_n — наподобие того, как $f(1)$, $f(23)$, $f(518)$, ... означали числовые значения функции $f(n)$.

*) Это обстоятельство символизируется стрелками, которые своими остриями указывают на точки, не принадлежащие графику.

В согласии с общим определением, функция x_n *считается заданной, если мы владеем правилом, по которому может быть вычислено любое ее значение, лишь только указано значение* n.

Обычный случай — это тот, когда функция x_n задается формулой, устанавливающей, какие аналитические операции надлежит произвести над переменным натуральным числом n (и над постоянными), чтобы получить соответствующее значение функции. Примеры:

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}, \quad a_n = q^n, \quad y_n = \log n \quad \text{и т. п.}$$

Но, разумеется, и в рассматриваемом здесь случае функция может быть задана любым другим правилом. В виде примера упомянем о «факториале числа n»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

а также о функции $\tau(n)$, представляющей число делителей числа n, или о функции $\varphi(n)$, указывающей, сколько в ряду $1, 2, 3, \ldots, n$ имеется чисел, взаимно простых с n. Несмотря на своеобразный характер правил, которыми задаются эти функции, они позволяют вычислять значения функций с такой же определенностью, как и формулы:

$$\tau(10) = 4, \quad \tau(12) = 6, \quad \tau(16) = 5, \ \ldots$$
$$\varphi(10) = 4, \quad \varphi(12) = 4, \quad \varphi(16) = 8, \ \ldots$$

Еще пример: представим себе десятичные приближения (скажем, по недостатку) для $\sqrt{2}$ со все возрастающей точностью:

$$1{,}4; \quad 1{,}41; \quad 1{,}414; \quad 1{,}4142; \ \ldots$$

Зная правило для приближенного вычисления корней, мы вправе считать вполне определенной функцию, равную приближенному значению упомянутого корня с точностью до $\frac{1}{10^n}$, хотя общего выражения для этого приближения мы не имеем.

В школьном курсе математики читателю не раз приходилось встречаться с функциями натурального указателя. Если задана бесконечная геометрическая прогрессия

$$\div\!\div\, a, \quad aq, \quad aq^2, \ \ldots,$$

то функцией указателя n является и общий член этой прогрессии

$$a_n = aq^{n-1}$$

и сумма n членов прогрессии

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1).$$

В связи с определением длины окружности и площади круга обычно рассматриваются правильные вписанные в окружность многоугольники, получаемые из вписанного шестиугольника последовательным удвоением числа сторон. Сторона такого многоугольника, его апофема, периметр и площадь — все являются функциями натурального указателя n, если за n принять попросту число повторений процесса удвоения.

21. Исторические замечания. Самый термин «функция» появился в одной работе Лейбница *) в 1692 г., а затем применялся братьями Якобом и Иоганном Бернулли **) для характеристики различных отрезков, так или иначе связанных с точками некоторой кривой. В 1718 г. Иоганн Бернулли впервые дает определение функции, свободное от геометрических представлений. Его ученик Эйлер ***) в своем учебнике «Введение в анализ бесконечно малых» (1748), по которому учились целые поколения математиков, воспроизводит определение Бернулли, несколько его уточняя:

«Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и из чисел или постоянных количеств» ****).

Как видим, в этом определении функция попросту отождествляется с тем аналитическим выражением, которым она задается.

Наряду с «явными» функциями Эйлер рассматривал и «неявные», определяемые неразрешенными уравнениями. В то же время — в связи с знаменитой задачей о колебании струны (о которой подробно будет рассказано во втором томе) — Эйлер считал возможным допустить в анализ не только «смешанные» функции, которые в разных частях промежутка задаются различными аналитическими выражениями [ср., п°18, 3°], но даже функции, определяемые произвольно начерченными графиками. В предисловии к его «Дифференциальному исчислению» (1755 г.) мы находим еще более общую, хотя и менее определенную формулировку:

«Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых» *****).

В течение ряда десятилетий существенного прогресса в определении понятия функции не было. Обычно приписывают Дирихле ******) заслугу выдвижения на первый план идеи соответствия, которая единственно и лежит в основе этого понятия.

---

*) Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — знаменитый немецкий философ и математик. Он разделяет с Ньютоном заслугу создания дифференциального и интегрального исчисления (см. исторический очерк в главе XIV).

**) Якоб Бернулли (1654—1705) и Иоганн Бернулли (1667—1748) принадлежали знаменитой в истории математики семье голландского происхождения; оба были сподвижниками Лейбница и много способствовали (особенно младший из них) распространению нового исчисления.

***) Леонард Эйлер (1707—1783) — выдающийся математик; швейцарец по происхождению, он бóльшую часть своей сознательной жизни провел в России и состоял членом Петербургской Академии наук.

****) Имеется русский перевод тома I упомянутого сочинения (в оригинале написанного по-латыни), 1936 г.; см. стр. 30.

*****) См. русский перевод «Дифференциального исчисления», 1949 г., стр. 38.

******) Петер Густав Лежен-Дирихле (1805—1859) — выдающийся немецкий математик.

В 1837 г. он дал такое определение функции y от переменной x (в предположении, что последняя принимает все значения в некотором промежутке):

«Если каждому x отвечает единственное конечное y ..., то y называется ... функцией от x для этого промежутка. При этом вовсе нет необходимости, чтобы y во всем этом промежутке зависело от x по одному и тому же закону, и даже не обязательно представлять себе зависимость, выражаемую с помощью математических операций».

Это определение (несмотря на умаляющие его общность оговорки автора) сыграло важную роль в истории математического анализа.

Долгое время оставалось незамеченным, что Лобачевский*) высказал эту идею не только раньше, но и в безупречной форме. Примыкая поначалу к точке зрения Эйлера, Лобачевский постепенно отходит от нее и в своей работе «Об исчезании тригонометрических строк» (1834 г.) уже определенно говорит:

«Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или наконец зависимость может существовать и оставаться неизвестной» **).

Заметим в заключение, что привычное для нас обозначение функции: $f(x)$ — принадлежит Эйлеру.

§ 2. ВАЖНЕЙШИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

22. Элементарные функции. Перечислим здесь некоторые классы функций, получивших название *элементарных*.

1°. *Целая и дробная рациональные функции.* Функция, представляемая целым относительно буквы x многочленом

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

(a_0, a_1, a_2, ... — постоянные), называется ц е л о й р а ц и о н а л ь н о й ф у н к ц и е й.

Отношение двух таких многочленов

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

представляет д р о б н у ю р а ц и о н а л ь н у ю ф у н к ц и ю. Она определена для всех значений x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

Для примера на черт. 6 даны графики функции $y = ax^2$ (п а р а б о л ы) при различных значениях коэффициента a, а на черт. 7 — графики функции $y = \frac{a}{x}$ (р а в н о б о ч н ы е г и п е р б о л ы), также при различных значениях a.

---

*) Николай Иванович Л о б а ч е в с к и й (1793—1856) — великий русский математик, прославившийся созданием неэвклидовой геометрии.

**) Н. И. Л о б а ч е в с к и й, Полное собрание сочинений, т. V (1951), стр. 43.

4 Зак. 1413. Г. М. Фихтенгольц, I

2°. *Степенная функция*. Так называется функция вида

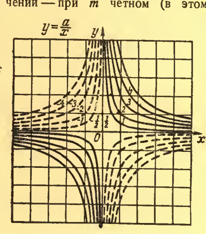
$$y = x^{\mu},$$

где μ — любое постоянное вещественное число. При целом μ получается рациональная функция. При μ дробном мы имеем здесь радикал. Например, пусть m — натуральное число и

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}.$$

Эта функция определена для всех значений x, если m — нечетное, и лишь для неотрицательных значений — при m четном (в этом

Черт. 6.



Черт. 7.

случае мы имеем в виду арифметическое значение радикала). Наконец, если μ — иррациональное число, мы будем предполагать $x > 0$ ($x = 0$ допускается лишь при $\mu > 0$).

На черт. 8 и 9 даны графики степенной функции при различных значениях μ.

3°. *Показательная функция*, т. е. функция вида

$$y = a^{x},$$

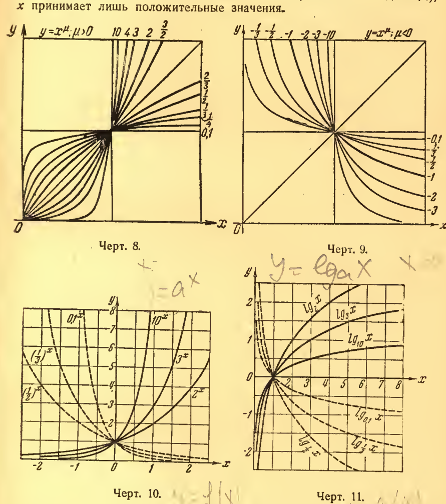
где a — положительное число, отличное от единицы; x принимает любое вещественное значение.

Графики показательной функции при различных значениях a даны на черт. 10.

4°. *Логарифмическая функция*, т. е. функция вида

$$y = \log_a x\ ^*),$$

где a, как и выше, — положительное число (отличное от единицы); x принимает лишь положительные значения.



Черт. 8. Черт. 9.

Черт. 10. Черт. 11.

На черт. 11 даны графики этой функции при различных значениях a.

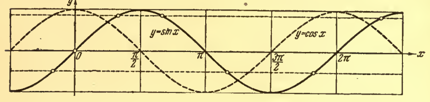
---

*) Обозначение $\log x$ мы сохраняем для десятичных логарифмов: $\log x = \log_{10} x$.

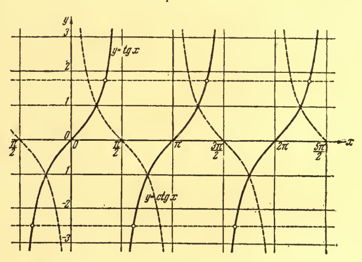
5°. *Тригонометрические функции*:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$
$$y = \sec x, \quad y = \csc x.$$

Очень важно раз навсегда усвоить, что *аргументы тригонометрических функций, если их рассматривать как меры углов,*



Черт. 12.



Черт. 13.

всегда выражают эти углы в *р а д и а н а х* (поскольку не оговорено противное). Для $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ исключаются значения вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, а для $\operatorname{ctg} x$ и $\csc x$ — значения вида $k\pi$ (k — целое).

Графики функций $y = \sin x\,(\cos x)$ и $y = \operatorname{tg} x$ $(\operatorname{ctg} x)$ даны на черт. 12 и 13. График синуса обычно называют *синусоидой*.

23. Понятие обратной функции. Прежде чем перейти к обратным тригонометрическим функциям, сделаем пояснение относительно обратных функций вообще.

Предположим, что функция $y = f(x)$ задана в некоторой области $\mathcal{X}$, и пусть $\mathcal{Y}$ будет множество всех значений, которые эта функция принимает, когда x изменяется в пределах области $\mathcal{X}$. В нашей практике как $\mathcal{X}$, так и $\mathcal{Y}$ обычно будут представлять собою промежутки.

Выберем какое-нибудь значение $y = y_0$ из области $\mathcal{Y}$; тогда в области $\mathcal{X}$ необходимо найдется такое значение $x = x_0$, при котором наша функция принимает именно значение y_0, так что

$$f(x_0) = y_0;$$

подобных значений x_0 может оказаться и несколько. Таким образом, каждому значению y из $\mathcal{Y}$ ставится в соответствие одно или несколько значений x; этим определяется в области $\mathcal{Y}$ однозначная или многозначная функция $x = g(y)$, которая и называется обратной для функции $y = f(x)$.

Рассмотрим примеры.

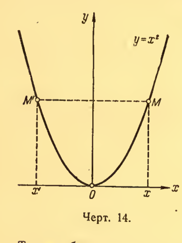
1. Пусть $y = a^x$ $(a > 1)$, где x изменяется в промежутке $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$. Значения y заполняют промежуток $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$, причем каждому y из этого промежутка отвечает, как мы знаем [12], в $\mathcal{X}$ одно определенное $x = \log_a y$. В этом случае обратная функция оказывается однозначной.

2. Наоборот, для функции $y = x^2$, если x изменять в промежутке $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$, обратная функция будет двузначной: каждому значению y из промежутка $\mathcal{Y} = [0, +\infty)$ отвечают два значения $x = \pm\sqrt{y}$ из $\mathcal{X}$. Вместо этой двузначной функции обычно рассматривают раздельно две однозначные функции $x = +\sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$ («ветви» двузначной функции). Их можно порознь также считать обратными для функции $y = x^2$, в предположении лишь, что область изменения x ограничена, соответственно, промежутком $[0, +\infty)$ или промежутком $(-\infty, 0]$.

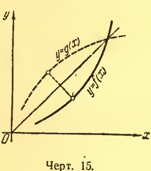
Заметим, что по графику функции $y = f(x)$ легко сообразить, будет ли обратная для нее функция $x = g(y)$ однозначной или нет. Первый случай представится, если любая прямая, параллельная оси x, пересекает этот график разве лишь в одной точке. Наоборот, если некоторые из таких прямых пересекают график в нескольких точках, обратная функция будет многозначной. В этом случае по графику же легко разбить промежуток изменения x на части так, чтобы каждой части уже отвечала однозначная «ветвь» этой функции. Например, по одному взгляду на параболу черт. 14, которая служит графиком функции $y = x^2$, ясно, что обратная ей функция двузначна и что для получения однозначных «ветвей» достаточно раздельно рассматривать правую и левую части этой параболы, т. е. положительные и отрицательные значения x *).

*) Ниже [71] мы вернемся еще к вопросу о существовании и однозначности обратной функции.

Если функция $x=g(y)$ является обратной для функции $y=f(x)$, то, очевидно, графики обеих функций совпадают. Можно, однако, потребовать, чтобы и аргумент обратной функции обозначался буквой x, т. е. вместо функции $x=g(y)$ рассматривать $y=g(x)$. Тогда лишь придется горизонтальную ось назвать осью y, а вертикальную — осью x; график все еще останется прежним. Если же пожелать, чтобы (новая) ось x была бы, как привычно, горизонтальной, а (новая) ось y — вертикальной, то эти оси нужно будет переставить одну на место другой, что уже изменит и график. Для осуществления этого проще всего повернуть плоскость чертежа xOy на $180°$ вокруг биссектрисы первого координатного угла (черт. 15).



Черт. 14.



Черт. 15.

Таким образом, окончательно, график $y=g(x)$ получается как зеркальное отражение графика $y=f(x)$ относительно этой биссектрисы. По черт. 10 и 11, например, сразу видно, что они именно так получены один из другого. Точно так же, исходя из высказанных соображений, легко объяснить симметричность (относительно биссектрисы) каждого из черт. 8 и 9.

24. Обратные тригонометрические функции. В дополнение к тем классам элементарных функций, которые были упомянуты в n°22, рассмотрим теперь

6°. *Обратные тригонометрические функции*:

$$y=\arcsin x, \quad y=\arccos x, \quad y=\operatorname{arctg} x,$$

$$y=\operatorname{arcctg} x, \quad (y=\operatorname{arcsc} x, \quad y=\operatorname{arccsc} x).$$

Остановимся сначала на первой из них. Функция $y=\sin x$ определена в промежутке $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$, причем ее значения заполняют сплошь промежуток $\mathscr{Y}=[-1, 1]$. Параллель оси x пересекает синусоиду, т. е. график функции $y=\sin x$ (черт. 12), в бесконечном множестве точек; иначе говоря, каждому значению y из

промежутка $[-1, 1]$ отвечает бесконечное множество значений x. Поэтому обратная функция, которую обозначают так:

$$x = \operatorname{Arcsin} y\ ^{*)},$$

будет (бесконечно-) многозначной.

Обычно рассматривают лишь одну «ветвь» этой функции, отвечающую изменению x между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Каждому y из $[-1, 1]$ в этих пределах отвечает одно значение x; его обозначают через

$$x = \arcsin y$$

и называют главным значением арксинуса.

Поворачивая синусоиду около биссектрисы первого координатного угла (черт. 16), получаем график многозначной функции $y = \operatorname{Arcsin} x$; жирно выделен график главной ветви ее $y = \arcsin x$, которая однозначно определена в промежутке $[-1, 1]$ значений x и притом удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

которое характеризует ее среди других ветвей.

Вспоминая из элементарной тригонометрии, как выражаются все значения угла, имеющего данный синус, через одно из этих значений, легко написать формулы, дающие все значения арксинуса:

$$\operatorname{Arcsin} x = \arcsin x + 2k\pi \text{ или } (2k+1)\pi - \arcsin x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Черт. 16.

Подобные же рассуждения применимы к функции $y = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$. И здесь обратная функция

$$y = \operatorname{Arccos} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

---

*) Мы уже подчеркивали в свое время [22, 5°], что аргумент x тригонометрической функции выражает угол в радианах; разумеется, и здесь значения обратных тригонометрических функций, — если их рассматривать как меры углов, — все выражены в радианах.

оказывается (бесконечно-) многозначной (см. черт. 12). Для выделения однозначной ветви, ее подчиняют условию

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

это есть главная ветвь арккосинуса.

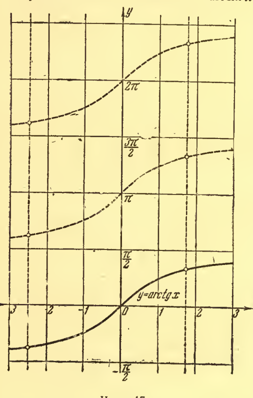
Функция $\arccos x$ связана с $\arcsin x$ очевидным соотношением

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

действительно, не только косинус угла $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ равен $\sin (\arcsin x) = x$, но и сам угол содержится именно между 0 и π. Остальные значения $\operatorname{Arccos} x$ выражаются через главное значение по формуле

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x$$

$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$



Черт. 17.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех значений x, кроме значений

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Значения y заполняют здесь промежуток $(-\infty, +\infty)$, причем каждому y снова соответствует бесконечное множество значений x (см. черт. 13). Поэтому обратная функция $x = \operatorname{Arctg} y$, заданная в промежутке $(-\infty, +\infty)$, будет (бесконечно-) многозначной. На черт. 17 изображен график функции $y = \operatorname{Arctg} x$, полученный поворотом на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла графика функции $y = \operatorname{tg} x$. За главное значение арктангенса, $\operatorname{arctg} x$, принимают то из значений этой многозначной функции, которое удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Таким путем определяется однозначная функция — главная ветвь арктангенса, заданная для всех значений x. Остальные значения арктангенса, как легко показать, получаются так:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Нетрудно установить прямую связь между функциями $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$:

$$\underset{(-\infty < x < +\infty)}{\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \quad \text{или} \quad \underset{(-1 < x < +1)}{\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Например, если положить $\alpha = \operatorname{arctg} x$, так что $\operatorname{tg} \alpha = x$, то $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, причем корень берется со знаком плюс, потому что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; отсюда и вытекает, что $\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Упомянем еще о функции $\operatorname{Arcctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$; ее главное значение определяется неравенствами

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

и связано с $\operatorname{arctg} x$ соотношением

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Остальные значения арккотангенса имеют вид

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

На функциях $\operatorname{arcsc} x$ $(-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < +\infty)$ и $\operatorname{arccsc} x$ (те же промежутки изменения) останавливаться не будем, предоставляя читателю самому в них разобраться.

25. Суперпозиция функций. Заключительные замечания. Познакомимся с понятием суперпозиции (или наложения) функций, которая состоит в том, что вместо аргумента данной функции подставляется другая функция (от другого аргумента). Например, суперпозиция функций $y = \sin x$ и $z = \log y$ дает функцию $z = \log \sin x$; аналогично получаются и функции

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad \text{и т. п.}$$

В общем виде предположим, что функция $z = \varphi(y)$ определена в некоторой области $\mathcal{Y} = \{y\}$, а функция $y = f(x)$ определена для x в области $\mathcal{X} = \{x\}$, причем значения ее все содержатся в области $\mathcal{Y}$. Тогда переменная z, как говорят, через посредство y и сама является функцией от x:

$$z = \varphi(f(x)).$$

По заданному x из $\mathscr{X}$ сначала находят соответствующее ему (по правилу, характеризуемому знаком f) значение y из $\mathscr{Y}$, а затем устанавливают соответствующее э т о м у значению y (по правилу, характеризуемому знаком φ) значение z; его и считают соответствующим выбранному x. Полученная *функция от функции*, или *сложная функция*, и есть результат *суперпозиции* функций $f(x)$ и $\varphi(y)$.

Предположение, что значения функции $f(x)$ не выходят за пределы той области $\mathscr{Y}$, в которой определена функция $\varphi(y)$, в е с ь м а с у щ е с т в е н н о: если его опустить, то может получиться и нелепость. Например, полагая $z = \log y$, а $y = \sin x$, мы можем рассматривать лишь такие значения x, для которых $\sin x > 0$, ибо иначе выражение $\log \sin x$ не имело бы смысла.

Мы считаем полезным здесь же подчеркнуть, что характеристика функции, как с л о ж н о й, связана не с природой функциональной зависимости z от x, а лишь со с п о с о б о м з а д а н и я этой зависимости. Например, пусть $z = \sqrt{1 - y^2}$ для y в $[-1, 1]$, а $y = \sin x$ для x в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$z = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$$

Здесь функция $\cos x$ оказалась з а д а н н о й в виде сложной функции.

Теперь, когда полностью выяснено понятие суперпозиции, мы можем точно охарактеризовать п р о с т е й ш и й из тех классов функций, которые изучаются в анализе: это, прежде всего, перечисленные выше элементарные функции 1°—6°, а затем — все те, которые из них получаются с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз. Про них говорят, что они в ы р а ж а ю т с я ч е р е з э л е м е н т а р н ы е в к о н е ч н о м в и д е; иногда их все также называют э л е м е н т а р н ы м и.

Впоследствии, овладев более сложным аналитическим аппаратом (бесконечные ряды, интегралы), мы познакомимся и с другими функциями, также играющими важную роль в анализе, но уже выходящими за пределы класса элементарных функций.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

26. Исторические замечаиия. Понятие предела ныие пронизывает весь математический анализ, да и в других областях математики также играет важную роль. Однако (как читатель увиднт в главе XIV) это поиятие вовсе не лежало в осиове диффереициальиого и иитегральиого нсчислеиия при его возникновении. Впервые определение понятия предела появляется (по существу в той же форме, как это будет изложеио ниже в n°28) у Валлиса *) в «Арифметике бесконечиых величин» (1655). Ньютон в знамеиитых «Математических началах иатуральиой философии» (1686—1687) опубликовал свой метод первых н последних отиошений (или сумм), в котором можио усмотреть зачатки теории пределов. Однако иикому из великнх математиков XVIII века ие приходило в голову **о б о с н о в а т ь** новое исчисление иа понятии предела и тем ответить иа справедливые нападки, которым оио подвергалось **). В этом смысле характериа позиция Эйлера, который в предисловии к трактату по «Дифференциальиому исчислеиию» (1755) отчетливо говорит о пределе, ио нигде во всей кииге этим понятием не пользуется!

Перелом в указаниом вопросе был создан «Алгебраическим анализом» Коши ***) (1821) и дальнейшими его публикациями, где впервые развита была теория пределов, послужившая в руках Коши действеииым орудием для строгого построения всего математического анализа. Позиция Коши, развеявшая мистический туман, которым до иего были покрыты иачала анализа, получила всеобщее призиаиие.

Впрочем, заслугу Коши разделяют и другие ученые, из которых особое место заиимает Больцано, в ряде случаев своими работами предупредивший не только Коши, ио и позднейших математнков. Эти работы ие получили распространения, и о них вспомнили лишь спустя много десятилетий.

27. Числовая последовательность. Установление основного в анализе понятия *предел* мы начнем с простейшего частного случая (известного даже из курса средней школы), именно — с предела **ф у н к ц и и** x_n **о т н а т у р а л ь н о г о а р г у м е н т а.** Как увидим, к этому случаю принципиально сводятся и все более сложные случаи.

Аргумент n принимает все значения из **н а т у р а л ь н о г о р я д а**

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ n',\ \ldots, \qquad (1)$$

*) Джон В а л л и с (1616—1703) — английский математик.

**) Подробнее об этом см. в главе XIV.

***) Огюстен Люи К о ш и (1789—1857) — знаменитый французский аналист.

члены которого мы представляем себе упорядоченными по возрастанию, так что большее число n' следует за меньшим числом n, меньшее число n предшествует большему числу n'.

Если задана функция x_n, то ее аргумент, или указатель n, можно рассматривать как номер соответствующего значения переменной. Таким образом, x_1 есть первое ее значение, x_2 — второе, x_3 — третье и т. д. Мы всегда будем представлять себе это множество значений $\{x_n\}$ упорядоченным, наподобие натурального ряда (1), по возрастанию номеров, т. е. в виде *числовой последовательности*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n'},\ \ldots\ ^{*)}. \qquad (2)$$

При $n' > n$ значение $x_{n'}$ следует за x_n (x_n предшествует $x_{n'}$) *независимо от того, будет ли само число $x_{n'}$ больше, меньше или даже равно x_n.*

Например, если задать функцию x_n одной из формул

$$x_n = 1, \quad x_n = (-1)^{n+1}, \quad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n},$$

то соответствующие последовательности будут:

$$\underset{1}{1},\ \ \underset{2}{1},\ \ \underset{3}{1},\ \ \underset{4}{1},\ \ \underset{5}{1},\ \ \underset{6}{1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{1},\ \ \underset{2}{-1},\ \ \underset{3}{1},\ \ \underset{4}{-1},\ \ \underset{5}{1},\ \ \underset{6}{-1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{0},\ \ \underset{2}{1},\ \ \underset{3}{0},\ \ \underset{4}{\frac{1}{2}},\ \ \underset{5}{0},\ \ \underset{6}{\frac{1}{3}},\ \ldots$$

В первом случае мы имеем просто постоянную величину: все «множество» принимаемых ею значений сводится к одному; во втором — это множество состоит из двух значений, принимаемых поочередно. Наконец, в третьем случае множество различных значений, принимаемых функцией x_n, бесконечно, но это не мешает значениям этой функции через одно равняться нулю. Таким образом, область изменения $\mathscr{X}$ функции x_n, как переменной величины, и последовательность (2) существенно отличаются одна от другой. Первое отличие в том, что в множестве $\mathscr{X}$ каждый элемент встречается по разу, а в последовательности (2) один и тот же элемент может повторяться несколько (и даже бесконечное множество) раз. Второе же — и самое существенное — отличие заключается в том, что множество $\mathscr{X}$ «аморфно», лишено порядка, а для элементов последовательности (2) установлен определенный порядок.

Привычный способ записи последовательности [см. (2)] как бы предполагает пространственное расположение элементов после-

---

*) Аналогично можно было бы говорить и о последовательности точек прямой или каких-нибудь других объектов, занумерованных натуральными указателями.

довательности. Но такая запись применяется лишь для удобства и с существом дела не связана. Если мы будем говорить, что переменная «пробегает» такую-то последовательность значений, то у читателя может возникнуть представление о прохождении переменной своих значений в последовательные моменты времени, но на деле и время тут не при чем. Лишь для образности языка употребляют иной раз и выражения: «далекие» значения переменной, начиная с некоторого «места» или с некоторого «момента» изменения, и т. п.

28. Определение предела последовательности. Упорядочение значений переменной x_n по возрастанию их номеров, приведшее к рассмотрению последовательности (2) этих значений, облегчает понимание самого «процесса» приближения переменной x_n — при безграничном возрастании n — к ее пределу a.

Число a называется пределом переменной x_n, если последняя отличается от a сколь угодно мало, начиная с некоторого места, т. е. для всех достаточно больших номеров n.

Этим суть дела выражена ярко, но что значит «сколько угодно мало» и «достаточно большие» — еще подлежит уточнению. Приведем теперь более длинное, но уже исчерпывающе строгое определение предела:

Число a называется пределом переменной x_n, если для каждого положительного числа ε, сколько бы мало оно ни было, существует такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3}$$

Тот факт, что a является пределом переменной x_n, записывают так:

$$\lim x_n = a$$

(lim есть сокращение латинского слова limes, означающего «предел»). Говорят еще, что переменная *стремится* к a, и пишут

$$x_n \to a.$$

Наконец, *число a называют также пределом последовательности* (2), и говорят, что эта последовательность *сходится* к a.

Неравенство (3), где ε произвольно, и есть точная запись утверждения, что x_n от a «отличается сколь угодно мало», а номер N как раз и указывает то «место», начиная с которого это обстоятельство осуществляется, так что «достаточно большими» будут все номера $n > N$.

Важно дать себе отчет в том, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз навсегда; он зависит от выбора числа ε. Для того чтобы подчеркнуть это, мы иной раз вместо N будем писать N_ε. При *уменьшении* числа ε соответствующий номер

$N = N_\varepsilon$, вообще говоря, увеличивается: чем бо́льшей близости значений переменной x_n к a мы требуем, тем «более далекие» значения ее в ряду (2) приходится рассматривать.

Исключение представляет тот случай, когда все значения переменной x_n равны постоянному числу a. Очевидно, что тогда $a = \lim x_n$, но на этот раз неравенство (3) будет выполняться для любого $\varepsilon > 0$ одновременно при всех значениях x_n *).

Неравенство (3), как мы знаем [8], равносильно следующим:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

или

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \tag{4}$$

этим мы часто будем пользоваться впоследствии.

Открытый промежуток $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, с центром в точке a, принято называть окрестностью этой точки. Таким образом, *какую бы малую окрестность точки a ни взять, все значения x_n, начиная с некоторого из них, должны попасть в эту окрестность* (так что вне нее может остаться разве лишь конечное

Черт. 18.

число этих значений). Если изобразить число a и значения переменной x_n точками на числовой оси [n°13] (черт. 18), то точка, изображающая число a, окажется как бы средоточием сгустка точек, изображающих значения x_n.

29. Бесконечно малые величины. Случай, когда переменная стремится к нулю: $x_n \to 0$, представляет особый интерес.

Переменная x_n, имеющая своим пределом нуль, называется бесконечно малой величиной, или просто бесконечно малой.

Если в определении предела переменной x_n [28] положить $a = 0$, то неравенство (3) примет вид

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \quad (\text{для } n > N_\varepsilon).$$

Таким образом, данное выше определение бесконечно малой можно подробнее сформулировать без упоминания термина «предел»:

Переменная x_n называется бесконечно малой, если она для достаточно больших номеров становится и остается по абсолютной величине меньшей сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

---

*) Аналогичное обстоятельство имеет место для переменной x_n, значения которой становятся равными a, начиная с некоторого места.

Не вполне удачный (исторически сложившийся) термин «бесконечно малая» величина не должен вводить читателя в заблуждение: ни одно в отдельности взятое значение этой величины, если оно не нуль, не может квалифицироваться, как «малое». Суть дела в том, что это — переменная величина *), которая лишь в процессе своего изменения способна в конце концов сделаться меньшей произвольно взятого числа ε.

Если вернуться к общему случаю переменной x_n, имеющей предел a, то разность

$$\alpha_n = x_n - a$$

между переменной и ее пределом, очевидно, будет бесконечно малой: ведь, в силу (3),

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (\text{для } n > N_\varepsilon).$$

Обратно, если α_n есть бесконечно малая, то $x_n \to a$. Это приводит нас к следующему утверждению:

Для того чтобы переменная x_n имела своим пределом постоянное число a, необходимо и достаточно, чтобы разность между ними $\alpha_n = x_n - a$ была бесконечно малой.

В связи с этим можно было бы дать и для понятия «предел» другое определение (равносильное старому):

Постоянное число a называется пределом переменной x_n, если разность между ними есть бесконечно малая величина.

Разумеется, если исходить из этого определения предела, то для бесконечно малой нужно использовать второе из приведенных выше определений. Иначе получился бы порочный круг: предел определялся бы через бесконечно малую, а бесконечно малая — через предел!

Итак, если переменная $x_n \to a$, то она может быть представлена в виде

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где α_n есть бесконечно малая, и обратно, если переменная допускает такое представление, то она имеет пределом a. Этим часто пользуются на практике для установления предела переменной.

30. Примеры. 1) Рассмотрим переменные

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

---

*) Исключая неинтересный случай, когда она тождественно равна нулю.

им отвечают такие последовательности значений:

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\ \ldots,$$

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\ \ldots,$$

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\ \ldots.$$

Все три переменные представляют собой бесконечно малые, т. е. имеют пределом нуль. Действительно, для них

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

лишь только $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в качестве N_ε можно, например, взять наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ *).

Отметим, что первая переменная все время больше своего предела нуль, вторая — все время меньше его, третья же — попеременно становится то больше, то меньше его.

2) Если положить

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n},$$

то переменная пробегает такую последовательность значений:

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{6},\ \ldots.$$

И в этом случае $x_n \to 0$, так как

$$|x_n| \leqslant \frac{3}{n} < \varepsilon$$

для $n > \frac{3}{\varepsilon}$, так что за N_ε можно принять $E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$.

Мы сталкиваемся здесь с любопытной особенностью: переменная поочередно то *приближается* к своему пределу нуль, то *удаляется* от него.

3) Пусть теперь

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{n};$$

с этой переменной мы уже имели дело в n°27. Здесь также $x_n \to 0$, ибо

$$|x_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

лишь только $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$.

Отметим, что для всех нечетных значений n переменная оказывается *равной своему пределу*.

*) См. стр. 41.

Эти простые примеры интересны тем, что они характеризуют многообразие тех возможностей, которые охватываются данным выше определением предела. Несущественно, лежат ли значения переменной с одной стороны от предела или нет; несущественно, приближается ли переменная с каждым шагом к своему пределу; несущественно, наконец, достигает ли переменная своего предела, т. е. принимает ли значения, равные пределу. Существенно лишь то, о чем говорится в определении: переменная должна отличаться от предела сколь угодно мало в конце концов, т. е. для достаточно далеких своих значений.

4) Определим переменную формулой

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a > 1)$$

и докажем, что $x_n \to 1$.

Если воспользоваться неравенством (3) в n° 11, то можно написать:

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon, \text{ лишь только } n > N_\varepsilon = E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

Можно, однако, рассуждать иначе. Неравенство

$$|x_n - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

равносильно такому:

$$\frac{1}{n} < \log_a (1 + \varepsilon) \quad \text{или} \quad n > \frac{1}{\log_a (1 + \varepsilon)},$$

так что оно выполняется при $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\log_a (1+\varepsilon)}\right)$.

В соответствии с выбранным способом рассуждения мы пришли к различным выражениям для N_ε. Например, при $a = 10$, $\varepsilon = 0{,}01$ получаем $N_{0,01} = \frac{9}{0{,}01} = 900$ по первому способу и $N_{0,01} = E\left(\frac{1}{0{,}00432\ldots}\right) = 231$ — по второму. По второму способу мы получили наименьшее из возможных значений для $N_{0,01}$, ибо уже $10^{\frac{1}{231}} = 1{,}010017\ldots$ отличается от числа 1 больше, чем на $\varepsilon = 0{,}01$. То же будет и в общем случае.

Заметим по этому поводу, что мы вовсе не заинтересованы именно в наименьшем возможном значении N_ε, если речь идет только об установлении факта стремления к пределу. Должно быть гарантировано выполнение неравенства (3), начиная хоть с какого-нибудь места, далекого или близкого — безразлично.

5) Важный пример бесконечно малой дает переменная

$$\alpha_n = q^n, \quad \text{где} \quad |q| < 1.$$

Для доказательства того, что $\alpha_n \to 0$, рассмотрим неравенство

$$|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon;$$

оно равносильно таким:

$$n \cdot \log |q| < \log \varepsilon \quad \text{или} \quad n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \text{ *)}.$$

*) Следует иметь в виду, что $|q| < 1$ и $\log |q| < 0$; поэтому при делении обеих частей неравенства на это число знак неравенства должен быть изменен на обратный.

Таким образом, если положить (считая $\varepsilon < 1$)

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}\right),$$

то при $n > N_\varepsilon$ упомянутое неравенство наверное выполнится.

Аналогично легко убедиться в том, что и переменная

$$\beta_n = Aq^n,$$

где попрежнему $|q| < 1$, а A — постоянное число, также есть бесконечно малая.

6) Рассмотрим, далее, бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$$\div\; a,\ aq,\ aq^2, \ldots,\ aq^{n-1}, \ldots \qquad (|q| < 1)$$

и поставим вопрос об определении ее с у м м ы.

Под суммой бесконечной прогрессии, как известно, разумеется предел, к которому стремится сумма s_n ее n членов при безграничном возрастании n. Но

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n,$$

так что переменная s_n разнится от постоянного числа $\frac{a}{1-q}$ на величину $\alpha_n = -\frac{a}{1-q}\cdot q^n$, которая, как мы только что видели, является бесконечно малой. Следовательно, по второму определению предела, искомая сумма прогрессии

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1-q}.$$

31. Бесконечно большие величины. Бесконечно малым величинам, в некотором смысле, противопоставляются б е с к о н е ч н о б о л ь ш и е в е л и ч и н ы (или просто б е с к о н е ч н о б о л ь ш и е).

Переменная x_n называется б е с к о н е ч н о б о л ь ш о й, если она для достаточно больших значений n становится и остается по абсолютной величине б о́ л ь ш е й сколь угодно большого наперед заданного числа $\mathrm{E} > 0$:

$$|x_n| > \mathrm{E} \quad (\textit{для } n > N_{\mathrm{E}}).$$

Как и в случае бесконечно малых, здесь также следует подчеркнуть, что ни одно в отдельности взятое значение бесконечно большой величины не может быть квалифицировано, как «большое», мы имеем здесь дело с п е р е м е н н о й величиной, которая л и ш ь в п р о ц е с с е с в о е г о и з м е н е н и я способна в конце концов сделаться бо́льшей произвольно взятого числа E.

Примерами бесконечно больших могут служить переменные

$$x_n = n, \quad x_n = -n, \quad x_n = (-1)^{n+1}n,$$

которые пробегают натуральный ряд чисел, но первая со знаком плюс, вторая со знаком минус, третья же — с чередующимися знаками.

Вот еще один пример бесконечно большой величины:

$$x_n = Q^n, \quad \text{при} \quad |Q| > 1.$$

Действительно, каково бы ни было $\mathrm{E} > 0$, неравенство

$$|x_n| = |Q|^n > \mathrm{E}$$

выполняется, лишь только

$$n \cdot \log|Q| > \log \mathrm{E} \quad \text{или} \quad n > \frac{\log \mathrm{E}}{\log|Q|}\ ^{*)},$$

так что за N_E можно взять число

$$E\left(\frac{\log \mathrm{E}}{\log|Q|}\right).$$

Особенно важны те случаи, когда бесконечно большая величина x_n (по крайней мере, для достаточно больших n) сохраняет определенный знак ($+$ или $-$); *тогда, в соответствии со знаком, говорят, что переменная x_n имеет предел $+\infty$ или $-\infty$, а также, что она стремится к $+\infty$* или $-\infty$; при этом пишут

$$\lim x_n = +\infty, \ x_n \to +\infty \ \text{или} \ \lim x_n = -\infty, \ x_n \to -\infty.$$

Можно было бы дать для этих случаев и независимое определение, заменив неравенство $|x_n| > \mathrm{E}$, смотря по случаю, неравенством

$$x_n > \mathrm{E} \quad \text{или} \quad x_n < -\mathrm{E},$$

откуда уже вытекает, соответственно, что $x_n > 0$ или $x_n < 0$.

Очевидно, что бесконечно большая величина x_n в общем случае характеризуется соотношением $|x_n| \to +\infty$.

Из приведенных выше примеров бесконечно больших величин, очевидно, переменная $x_n = n$ стремится к $+\infty$, переменная $x_n = -n$ стремится к $-\infty$. Что же касается третьей переменной: $x_n = (-1)^{n+1}n$, то про нее нельзя сказать ни что она стремится к $+\infty$, ни что она стемится к $-\infty$.

Наконец, относительно переменной $x_n = Q^n$ лишь при $Q > 1$ можно сказать, что она стремится к $+\infty$; при $Q < -1$ у нее предела нет.

С «несобственными числами» $\pm\infty$ мы уже сталкивались в n°6; следует помнить, что их применение имеет совершенно условный смысл, и остерегаться производить над этими числами арифметические операции. Вместо $+\infty$ часто пишут просто ∞.

В заключение упомянем о простой связи, которая существует между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.

Если переменная x_n является бесконечно большой, то ее обратная величина $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ будет бесконечно малой.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. По определению бесконечно большой, для числа $\mathrm{E} = \frac{1}{\varepsilon}$ найдется такой номер N, что

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \ \text{лишь только} \ n > N.$$

*) Так как $|Q| > 1$, то $\log|Q| > 0$.

Тогда для тех же значений n, очевидно, будет

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Аналогично можно доказать и обратное утверждение:

Если переменная α_n *(не обращающаяся в нуль) является бесконечно малой, то обратная для нее величина* $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ *будет бесконечно большой.*

32. Определение предела функции. Рассмотрим числовое множество $\mathscr{X} = \{x\}$. *Точка a называется точкой сгущения этого множества, если в любой окрестности* $(a - \delta, a + \delta)$ [n° 28] *этой точки содержатся значения x из $\mathscr{X}$, отличные от a.* Сама точка сгущения при этом может принадлежать $\mathscr{X}$ или нет. Например, если $\mathscr{X} = [a, b]$ или $\mathscr{X} = (a, b]$, то a в обоих случаях является точкой сгущения для $\mathscr{X}$, но в первом случае она сама содержится в $\mathscr{X}$, а во втором — нет.

В предположении, что a есть точка сгущения для $\mathscr{X}$, можно извлечь из $\mathscr{X}$ — и притом бесчисленным множеством способов — такую последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

значений x, отличных от a, которая имела бы своим пределом a. Действительно, задавшись последовательностью положительных чисел δ_n, сходящейся к нулю, в каждой окрестности $(a - \delta_n, a + \delta_n)$ точки a (при $n = 1, 2, 3, \ldots$) найдем по точке $x = x_n$ из $\mathscr{X}$, отличной от a; так как $\delta_n \to 0$ и $|x_n - a| < \delta_n$, то $x_n \to a$.

Пусть теперь в области $\mathscr{X}$, для которой a является точкой сгущения, задана некоторая функция $f(x)$. Представляет интерес поведение этой функции при приближении x к a. Говорят, что *функция $f(x)$ имеет предел A, конечный или нет, при стремлении x к a* (или короче — *в точке a*), *если, какую бы последовательность (2) с пределом a, извлеченную из $\mathscr{X}$, ни пробегала независимая переменная x, соответствующая последовательность значений функции*

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{5}$$

всегда имеет предел A. Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{6}$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to a. \tag{7}$$

Предположим теперь, что множество $\mathscr{X} = \{x\}$ содержит сколь угодно большие положительные значения x; тогда говорят, что $+\infty$ *является точкой сгущения этого множества.* Если под

окрестностью точки $+\infty$ разуметь промежуток $(\Delta, +\infty)$, то можно высказанное предположение представить и в такой форме: *в каждой окрестности точки $+\infty$ должны содержаться числа из множества $\mathscr{X}$.*

Если это предположение выполнено, то можно из $\mathscr{X}$ выделить последовательность (2), имеющую пределом $+\infty$. Действительно, взяв любую положительную переменную Δ_n, стремящуюся к $+\infty$, для каждого Δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ найдем в $\mathscr{X}$ значение $x_n > \Delta_n$; очевидно, $x_n \to +\infty$.

В предположении, что $+\infty$ является точкой сгущения для $\mathscr{X}$, рассмотрим определенную в этой области функцию $f(x)$. Для нее можно установить понятие *предела при $x \to +\infty$*:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

совершенно так же, как и выше, заменив лишь a на $+\infty$.

Аналогично устанавливается и понятие *предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$*:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Здесь нужно лишь заранее предположить, что $-\infty$ *есть точка сгущения множества $\mathscr{X}$* — смысл этого ясен сам собой.

Скажем в заключение о переносе на рассматриваемый общий случай предела функции — терминологии, установленной в n° **29** и **31** для функции от натурального аргумента. Пусть, при определенном предельном переходе по x, функция $f(x)$ стремится к нулю; тогда эту функцию называют бесконечно малой величиной. Если функция $f(x)$ стремится к конечному пределу A, то разность $f(x) - A$ будет бесконечно малой, и наоборот. При стремлении $|f(x)|$ к $+\infty$ функцию называют бесконечно большой величиной*). Наконец, легко перенести на рассматриваемый общий случай и теоремы в конце n° **31**, устанавливающие связь между бесконечно малыми и бесконечно большими.

33. Другое определение предела функции. Понятие предела функции $f(x)$ при стремлении x к a мы построили на ранее изученном и более элементарном понятии предела последовательности. Можно, однако, дать другое определение предела функции, вовсе не использующее предела последовательности.

Ограничимся сначала случаем, когда оба числа a и A конечны. Тогда — в предположении, что a является точкой сгущения области $\mathscr{X}$, где задана функция $f(x)$, — новое определение предела можно дать в такой форме:

---

*) Если это обстоятельство имеет место при $x \to a$, где a — конечно, то говорят также, что в точке a функция обращается в бесконечность.

Функция $f(x)$ имеет пределом число A при стремлении x к a, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ лишь только } |x - a| < \delta \tag{8}$$

(где x взято из $\mathscr{X}$ и отлично от a) *).

Это определение совершенно равносильно данному выше в п° 32. Для доказательства предположим сначала, что выполнено только что сформулированное условие, и по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ найдено соответствующее ему в указанном смысле число $\delta > 0$. Извлечем из $\mathscr{X}$ произвольную последовательность (2), сходящуюся к a (причем все x_n отличны от a). По определению предела последовательности, числу $\delta > 0$ отвечает такой номер N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \delta$, а следовательно [см. (8)], и $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Этим и доказана сходимость последовательности (5) к A. Таким образом, выполнено условие, которое содержится в прежнем определении.

Предположим теперь, что предел функции существует в согласии с прежним определением. Для доказательства того, что одновременно выполняется и условие, содержащееся в новом определении, допустим противное. Тогда для н е к о т о р о г о числа $\varepsilon > 0$ уже не существовало бы соответствующего δ, т. е. какое бы малое δ ни взять, всегда найдется хоть одно значение переменной $x = x'$ (отличное от a), для которого

$$|x' - a| < \delta, \text{ но тем не менее } |f(x') - A| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем последовательность положительных чисел δ_n, сходящуюся к нулю. На основании только что сказанного для к а ж д о г о числа $\delta = \delta_n$ найдется такое значение $x' = x'_n$, что

$$|x'_n - a| < \delta_n, \text{ но тем не менее } |f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Из этих значений, таким образом, составляется некоторая последовательность

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots,\ x'_n\ \ldots,$$

для которой

$$|x'_n - a| < \delta_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

так как $\delta_n \to 0$, то $x'_n \to a$.

По предположению, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ f(x'_3),\ \ldots,\ f(x'_n),\ \ldots$$

---

*) Именно из того, что a есть точка сгущения для $\mathscr{X}$, явствует, что такие значения x в окрестности $(a - \delta, a + \delta)$ точки a наверное существуют.

должна сходиться к A, а это невозможно ввиду того, что при всех $n=1, 2, 3, \ldots$ имеем $|f(x'_n)-A| \geqslant \varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Легко указать новую форму определения предела и для тех случаев, когда одно из чисел a, A или оба они равны $+\infty$ или $-\infty$. Приведем для примера в развернутом виде определение, относящееся к случаю $a=+\infty$ и A конечного (или тоже равного $+\infty$):

Функция $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ имеет пределом конечное число A (или $+\infty$), если для каждого числа $\varepsilon>0$ $(E>0)$ *найдется такое число* $\Delta>0$, *что*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad (f(x)>E), \text{ лишь только } x>\Delta \qquad (x \text{ из } \mathscr{X}).$$

Доказательство равносильности этого определения с определением «на языке последовательностей» проводится так же, как и выше.

Если применить это определение к переменной x_n, как функции от независимой переменной n, при $n\to+\infty$, то мы вернемся к исходному определению предела такой функции, или — что то же — предела последовательности, данному в n° 28 и 31 (роль числа Δ там играет N). Таким образом, в то время как прежнее определение предела функции сводило это понятие к пределу последовательности, в свою очередь *определение предела последовательности оказывается попросту частным случаем определения предела функции вообще* — в его новой форме. Тот предел, который мы раньше обозначили через

$$\lim x_n,$$

по-новому должен был бы быть записан в виде

$$\lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Впрочем, на деле указание $n\to+\infty$ всегда может быть опущено без опасности недоразумения, ибо никакого другого предельного перехода здесь не может подразумеваться: область $\mathscr{N}$ изменения натурального указателя n имеет е д и н с т в е н н у ю точку сгущения $+\infty$.

Несмотря на различие в определениях предела функции (в новой форме) применительно к различным предположениям относительно a и A, сущность их одна и та же: функция должна содержаться в п р о и з в о л ь н о й «окрестности» своего предела A, лишь только независимая переменная содержится в н а д л е ж а щ е в ы б р а н н о й «окрестности» своего предела a.

Итак, для важного в анализе понятия предела функции мы имеем два равносильных определения; в зависимости от удобства мы будем пользоваться то тем, то другим из них.

34. Примеры. 1) Аналогично доказанному в n° 30, 5) предельному соотношению

$$\lim a^{\frac{1}{n}}=1 \qquad (a>1)$$

можно получить более общее:

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \qquad (a > 1).$$

Требуется для заданного $\varepsilon > 0$ *) найти такое $\delta > 0$, что

$$|a^x - 1| < \varepsilon, \text{ лишь только } |x| < \delta.$$

Но первое из этих неравенств или равносильные ему неравенства

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$$

выполнятся, если

$$\log_a (1 - \varepsilon) < x < \log_a (1 + \varepsilon).$$

Так как

$\log_a (1 - \varepsilon) + \log_a (1 + \varepsilon) = \log_a (1 - \varepsilon^2) < 0$ и $\log_a (1 - \varepsilon) < -\log_a (1 + \varepsilon)$,

то упомянутые неравенства и подавно выполнятся, если

$$-\log_a (1 + \varepsilon) < x < \log_a (1 + \varepsilon) \text{ или } |x| < \log_a (1 + \varepsilon).$$

Итак, стоит лишь положить $\delta = \log_a (1 + \varepsilon)$, чтобы при $|x| < \delta$ было $|a^x - 1| < \varepsilon$. Этим завершается доказательство.

2) Докажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad (\text{при } a > 1).$$

При любом $E > 0$ достаточно взять $\Delta = \log_a E$, чтобы

$$x > \Delta \text{ влекло за собой } a^x > E,$$

что и доказывает наше утверждение **).

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad (\text{при } a > 1).$$

Именно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, если взять

$$\Delta = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = -\log_a \varepsilon,$$

то при $x < -\Delta$ необходимо $a^x < \varepsilon$.

Если же $0 < a < 1$, то с помощью преобразования

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

легко установить результаты

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad (\text{при } 0 < a < 1).$$

3) Установим, что при $a > 1$ и $x > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty.$$

---

*) Причем ничто не мешает нам считать $\varepsilon < 1$.

**) С более частным результатом

$$\lim a^n = +\infty$$

мы уже имели дело в n° **31**.

При любом заданном $E > 0$, лишь только $x > a^E$, будем иметь: $\log_a x > E$ и, аналогично, лишь только $0 < x < a^{-E}$, выполняется неравенство: $\log_a x < -E$. Этим и доказаны оба соотношения.

4) Имеем, далее,

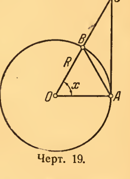
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Остановимся для примера на первом пределе. При любом $\varepsilon > 0$ достаточно взять $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, чтобы было: $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, так что

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon.$$

5) Теперь мы установим следующий (важный и для дальнейшего) результат:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (9)$$



Черт. 19.

Предварительно, однако, нам придется доказать некоторые полезные неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \qquad (10)$$

С этой целью в круге радиуса R рассмотрим острый угол AOB, хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (черт. 19). Тогда имеем: площадь $\triangle AOB <$ площади сектора $AOB <$ площади $\triangle AOC$ *).

Если через x обозначить радианную меру угла AOB, так что длина дуги $\breve{AB}$ выразится произведением Rx, то эти неравенства перепишутся так:

$$\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$$

Отсюда — по сокращении на $\frac{1}{2}R^2$ — и приходим к неравенствам (10).

В предположении, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разделим $\sin x$ на каждый из членов неравенств (10). Мы получим:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

откуда

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

*) При этом мы пользуемся теми сведениями о площадях элементарных фигур, которые излагаются в школьном курсе.

Но

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$$

[в силу (10)], так что

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < x.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < |x|,$$

которое, очевидно, сохранится и при изменении знака x, т. е. будет справедливо для всех $x \neq 0$, лишь только $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Полученное неравенство и решает вопрос. Действительно, если по произволу задано число $\varepsilon > 0$, то за δ достаточно выбрать наименьшее из чисел ε, $\frac{\pi}{2}$: при $|x| < \delta$, прежде всего, применимо это неравенство $\left(\text{ведь } \delta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, и именно в силу него (так как $\delta \leqslant \varepsilon$)

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < \varepsilon.$$

6) Интересен, наконец, и пример, когда предел функции не существует: функция $\sin x$ при стремлении x к $+\infty$ $(-\infty)$ вовсе не имеет предела.

В отсутствии предела всего проще убедиться, стоя на «точке зрения последовательностей». Достаточно заметить, что двум последовательностям

$$\left\{\frac{2n-1}{2}\pi\right\} \text{ и } \left\{\frac{2n+1}{2}\pi\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

значений x, имеющим пределом $+\infty$, отвечают последовательности значений функции, стремящиеся к различным пределам:

$$\sin\frac{2n-1}{2}\pi = -1 \to -1, \quad \sin\frac{2n+1}{2}\pi = 1 \to 1.$$

Если вспомнить «колебательный» характер синусоиды, то отсутствие предела в рассматриваемом случае станет наглядным.

Аналогично, и функция $\sin\frac{1}{\alpha}$ при стремлении α к нулю (как при $\alpha > 0$, так и при $\alpha < 0$) предела не имеет. Это, в сущности, лишь другая форма приведенного выше примера: стоит лишь в функции $\sin x$ заменить x на $\frac{1}{\alpha}$. Очевидно, если α пробегает последовательность положительных (отрицательных) значений, приближающихся к нулю, то $x = \frac{1}{\alpha}$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$, и обратно.

Напишем снова в выражении $\sin\frac{1}{\alpha}$ вместо буквы α букву x (чтобы вернуться к привычному обозначению абсциссы) и рассмотрим поучитель-

ный график функции

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

ограничиваясь значениями x от 0 до $\frac{2}{\pi}$ $\left(\text{и от } -\frac{2}{\pi} \text{ до } 0\right)$.

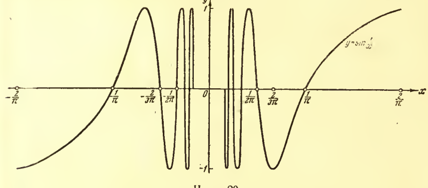
Отметим последовательно убывающие до 0 значения x:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \ldots, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \frac{1}{n\pi}, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \ldots;$$

им отвечают растущие до $+\infty$ значения $\frac{1}{x}$:

$$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2}, n\pi, \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots$$

В промежутках между указанными значениями (при *убывании* x) наша функция попеременно убывает от 1 до 0 и от 0 до -1, затем возрастает от -1 до 0 и от 0 до 1, и т. д. Таким образом, функция $\sin\frac{1}{x}$ производит бесконечное множество колебаний, подобно функции $\sin x$, но, в то время как для последней эти колебания распределяются на *бесконечный* промежуток, здесь они все умещаются в *конечном* промежутке, сгущаясь к нулю.



Черт. 20.

График изображен на черт. 20 (разумеется, не полностью — бесконечное множество колебаний воспроизвести невозможно!). Так как при изменении знака x и $\sin\frac{1}{x}$ меняется знак, то левая половина графика симметрична с правой относительно начала.

7) Если для $x \neq 0$ рассмотреть функцию $x \cdot \sin\frac{1}{x}$, которая отличается множителем x от только что изученной функции $\sin\frac{1}{x}$, то на этот раз предел при $x \to 0$ существует:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0,$$

что сразу ясно из неравенства

$$\left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|.$$

При приближении x к нулю, наша функция попрежнему производит бесконечное множество колебаний, но их амплитуда (благодаря множителю x) убывает, стремясь к нулю, чем и обеспечивается существование предела.

График функции

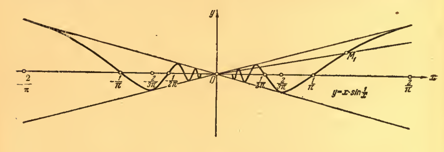
$$y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

изображен на черт. 21, он умещается между двумя биссектрисами $y = x$ и $y = -x$ координатных углов *).

Замечание. Мы имели пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0,$$

объединенные одной особенностью: ни одна из рассматриваемых здесь функций не определена при $x = 0$. Но это нисколько не мешает говорить



Черт. 21.

об их пределах при $x \to 0$, ибо, согласно точному смыслу данного выше определения, как раз значение $x = 0$ при этом не рассматривается.

Аналогично, то обстоятельство, что функция $\sin \frac{1}{x}$ не имеет смысла при $x = 0$, не мешает ставить вопрос об ее пределе при $x \to 0$; но на этот раз предел оказывается несуществующим.

35. Односторонние пределы. Если область $\mathscr{X}$ такова, что в любой близости от a, *но справа от* a, найдутся значения x из $\mathscr{X}$, то можно специализировать данное в n° **32** и **33** определение предела функции, ограничившись лишь значениями $x > a$. В этом случае предел функции, если он существует, называется *пределом функции* $f(x)$ *при стремлении* x *к* a *справа* (или короче — *в точке* a *справа*) и обозначается символом

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad f(a+0).$$

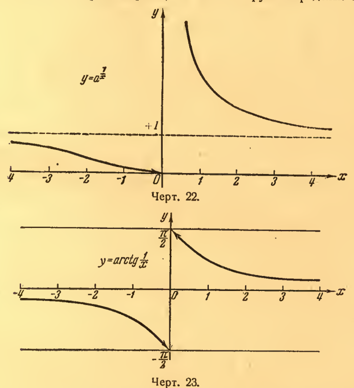
*) На черт. 20 и 21 для ясности пришлось по оси x взять бо́льший масштаб, что создает искажение.

Аналогично определяется понятие *предела функции при стремлении x к a (в точке a) слева*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad f(a-0)^{*)}.$$

Оба эти предела называются односторонними.

Если область $\mathscr{X}$ допускает безграничное приближение к a и справа и слева, то можно рассматривать и тот и другой пределы. Легко



Черт. 22.

Черт. 23.

установить, что *для существования обыкновенного* («двустороннего») *предела* (6) *необходимо и достаточно существование порознь и равенство обоих пределов справа и слева*:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

Отметим, что эти пределы могут оба существовать, но не быть равными. Примеры тому легко построить, исходя из уже рассмотренных в n° **34** примеров 1) и 4).

---

*) Если само $a=0$, то вместо $0+0$ $(0-0)$ пишут просто $+0$ (-0).

Примеры. Определим две функции для $x \neq 0$ равенствами

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}} \quad (a > 1), \qquad f_2(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Для первой из них имеем:

$$f_1(+0) = \lim_{x \to +0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +\infty} a^z = +\infty,$$

$$f_1(-0) = \lim_{x \to -0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to -\infty} a^z = 0.$$

Для второй же:

$$f_2(+0) = \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \to +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2},$$

$$f_2(-0) = \lim_{x \to -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \to -\infty} \operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2}.$$

Графики этих функций даны на черт. 22 и 23.

§ 2. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

36. Свойства функции от натурального аргумента, имеющей конечный предел. Так как формулировка и доказательство теорем, относящихся к функции от натурального аргумента, выглядит проще, чем в случае функции общего вида, то мы всегда сначала будем формулировать и доказывать теоремы для отмеченного частного случая, а затем лишь сделаем указания относительно переноса их на общий случай.

1) *Если переменная x_n стремится к пределу a, и $a > p$ $(a < q)$, то и все значения переменной, начиная с некоторого, тоже будут больше p (меньше q).*

Выбрав положительное число $\varepsilon < a - p$ $(q - a)$, будем иметь

$$a - \varepsilon > p \quad (a + \varepsilon < q).$$

Но, по определению предела переменной x_n [п°28], для этого ε найдется такое N, что при $n > N$ будет

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Для тех же значений и подавно: $x_n > p$ $(x_n < q)$.

Это простое предложение имеет ряд полезных следствий.

2) *Если переменная x_n стремится к пределу $a > 0$ (< 0), то и сама переменная $x_n > 0$ (< 0), начиная с некоторого места.*

Для доказательства достаточно применить предыдущее утверждение, взяв $p = 0$ $(q = 0)$.

3) Если переменная x_n стремится к пределу a, причем всегда

$$x_n \leqslant p \quad (\geqslant q),$$

то и

$$a \leqslant p \ (\geqslant q).$$

Доказывается от противного, со ссылкой на 1).

Опираясь на предложение 1), докажем теперь единственность предела.

4) *Переменная* x_n *не может одновременно стремиться к двум различным (конечным) пределам.*

Действительно, допустим противное: пусть одновременно $x_n \to a$ и $x_n \to b$, причем $a < b$. Возьмем любое число r между a и b:

$$a < r < b.$$

Поскольку $x_n \to a$ и $a < r$, найдется такой номер N', что для $n > N'$ будет выполняться неравенство: $x_n < r$. С другой стороны, раз $x_n \to b$ и $b > r$, найдется и такой номер N'', что для $n > N''$ окажется: $x_n > r$. Если взять номер n бо́льшим и N' и N'', то соответствующее значение переменной x_n будет одновременно и меньшим r, и большим r, что невозможно.

Это противоречие доказывает наше утверждение.

5) *Если переменная* x_n *имеет конечный предел, то она является ограниченной* в том смысле, что все ее значения содержатся между двумя конечными границами:

$$m \leqslant x_n \leqslant M \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{1}$$

Прежде всего, непосредственно из определения предела ясно, что, какое бы ни взять $\varepsilon > 0$, найдется такое N, что для $n > N$ будет

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Таким образом, для $n = N+1,\ N+2,\ \ldots$ значения x_n уже заключены между границами $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Вне этих границ могут лежать лишь некоторые из первых N значений

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N.$$

Так как таких исключительных значений всего конечное число, то можно раздвинуть указанные границы так, чтобы между новыми границами m и M содержались уже все значения x_n. Например, можно за m взять наименьшее из чисел

$$a - \varepsilon,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N,$$

а за M — наибольшее из чисел

$$a + \varepsilon,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N.$$

Замечание. Отсюда ясно, в частности, что переменная, имеющая конечный предел, не может одновременно стремиться ни к $+\infty$, ни к $-\infty$. В этом состоит некоторое дополнение к теореме 4) об единственности предела.

37. Распространение на случай функции от произвольной переменной. Легко перефразировать содержание n° **36** на общий случай функции $f(x)$, заданной в некоторой области $\mathcal{X}$ с точкой сгущения a *).

1) *Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, и $A > p$ ($A < q$), то для достаточно близких к a значений x (отличных от a) и сама функция удовлетворяет неравенству*

$$f(x) > p \qquad (f(x) < q). \tag{2}$$

Выбрав положительное число $\varepsilon < A - p$ $(q - A)$, будем иметь

$$A - \varepsilon > p \qquad (A + \varepsilon < q).$$

Но, по второму определению предела функции [n° **33**], для этого ε найдется такое δ, что, лишь только $|x - a| < \delta$ (где x взято из $\mathcal{X}$ и отлично от a), тотчас же

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Для тех же значений x и подавно будет выполняться (2).

Читатель видит, что никаких новых идей для доказательства привлекать не пришлось.

Отсюда непосредственно могут быть оправданы и утверждения, аналогичные 2), 3) и 4) из n° **36**. Например, полагая в 1) $p = 0$ $(q = 0)$, получим:

2) *Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет конечный положительный (отрицательный) предел, то и сама функция положительна (отрицательна), по крайней мере, для значений x, достаточно близких к a, но отличных от a.*

Справедливо и утверждение, аналогичное 5), но в более слабой форме:

3) *Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, то для значений x, достаточно близких к a, функция будет ограниченной* в том смысле, что ее значения содержатся между двумя конечными границами:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{лишь для} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Действительно, по определению предела, задавшись числом $\varepsilon > 0$, найдем такое $\delta > 0$, что

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \quad \text{если} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Напомним, что аналогичный результат мы первоначально получили и для переменной x_n: неравенства

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

*) Число a может быть $+\infty$ или $-\infty$; но мы для определенности ограничимся случаем конечного a.

выполнялись только для $n > N$. Но в прежнем случае вне этих границ могло оказаться лишь конечное число значений, и легко было найти новые границы, между которыми содержались бы уже все значения без исключения. Здесь же этого, вообще говоря, уже сделать нельзя, ибо значений x, для которых $|x - a| \geqslant \delta$, может оказаться и бесконечное множество. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ (для $x > 0$) при $x \to 1$ стремится к единице; очевидно, $0 < f(x) < 2$, если $|x - 1| < \frac{1}{2}$, однако для всех рассматриваемых значений x функция $f(x)$ вовсе не будет ограниченной: при $x \to +0$ она стремится к $+\infty$.

38. Предельный переход в равенстве и неравенстве. Соединяя две переменные x_n и y_n знаками равенства или неравенства, мы всегда подразумеваем, что речь идет о соответствующих значениях их, т. е. о значениях с одним и тем же номером.

1) *Если две переменные x_n, y_n при всех их изменениях равны: $x_n = y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то равны и эти пределы: $a = b$.

Непосредственно следует из единственности предела [36, 4)].

Этой теоремой пользуются обычно в форме предельного перехода в равенстве: из $x_n = y_n$ заключают, что $\lim x_n = \lim y_n$.

2) *Если для двух переменных x_n, y_n всегда выполняется неравенство $x_n \geqslant y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и $a \geqslant b$.

Допустим противное: пусть $a < b$. Рассуждая так же, как и в n° 36, 4), возьмем число r между a и b, так что $a < r < b$. Тогда, с одной стороны, найдется такой номер N', что для $n > N'$ будет $x_n < r$, с другой же — найдется и такой номер N'', что для $n > N''$ окажется $y_n > r$. Если N больше обоих чисел N', N'', то для номеров $n > N$ будут одновременно выполняться оба неравенства

$$x_n < r, \quad y_n > r, \quad \text{откуда } x_n < y_n,$$

что противоречит предположению. Теорема доказана.

Эта теорема устанавливает допустимость предельного перехода в неравенстве (соединенном с равенством): из $x_n \geqslant y_n$ можно заключить, что $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

Конечно, знак $>$ всюду может быть заменен знаком $<$.

Мы обращаем внимание читателя на то, что из строгого неравенства $x_n > y_n$, вообще говоря, не вытекает строгое же

6 Зак. 1413. Г. М. Фихтенгольц, I

неравенство $\lim x_n > \lim y_n$, а только, попрежнему: $\lim x_n \geqslant \lim y_n$. Так, например, $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ при всех n, и тем не менее

$$\lim \frac{1}{n} = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Из теоремы 2), как частный случай, может быть получено утверждение 3) п° **36**.

При установлении существования и величины предела часто бывает полезна теорема:

3) *Если для переменных* x_n, y_n, z_n *всегда выполняются неравенства*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

причем переменные x_n *и* z_n *стремятся к общему пределу* a:

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

то и переменная y_n *имеет тот же предел*:

$$\lim y_n = a.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По этому ε, прежде всего, найдется такой номер N', что при $n > N'$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Затем найдется такой номер N'', что при $n > N''$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Пусть N будет больше обоих чисел N' и N''; тогда, при $n > N$, выполняются оба предшествующих двойных неравенства, и потому

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

Окончательно, при $n > N$

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad \text{или} \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

Таким образом, действительно, $\lim y_n = a$.

Из этой теоремы, в частности, следует: *если при всех* n

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

и известно, что $z_n \to a$, *то и* $y_n \to a$. Впрочем, это очень легко доказать и непосредственно.

Теоремы 1), 2) и 3) легко распространяются и на случай бесконечных пределов.

39. Леммы о бесконечно малых. В дальнейших теоремах нам придется рассматривать одновременно две переменные (или больше), сочетая их между собой знаками арифметических действий. При этом, как и выше, мы относим эти знаки к с о о т в е т с т в у ю щ и м значе-

ниям переменных. Например, говоря о сумме двух переменных x_n и y_n, пробегающих порознь последовательности значений

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

и

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

мы имеем в виду переменную $x_n + y_n$, принимающую последовательность значений

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n, \ldots$$

При доказательстве теорем, относящихся к результатам арифметических операций над переменными, будут полезны следующие две леммы о бесконечно малых:

Лемма 1. *Сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.*

Проведем доказательство для случая двух бесконечно малых α_n и β_n (общий случай исчерпывается аналогично).

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно малой, по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ для бесконечно малой α_n найдется такой номер N', что при $n > N'$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точно так же и для бесконечно малой β_n найдется такой номер N'', что при $n > N''$ будет

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять натуральное число N бо́льшим обоих чисел N' и N'', то при $n > N$ одновременно выполняются оба эти неравенства, так что

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, величина $\alpha_n + \beta_n$, действительно, является бесконечно малой.

Лемма 2. *Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.*

Пусть для всех значений n

$$m \leqslant x_n \leqslant M.$$

Обозначив через L наибольшую из абсолютных величин $|m|$, $|M|$, будем иметь

$$-L \leqslant m \leqslant x_n \leqslant M \leqslant L \text{ или } |x_n| \leqslant L.$$

Если задано произвольное число $\varepsilon > 0$, то по числу $\frac{\varepsilon}{L}$ для бесконечно малой α_n найдется такой номер N, что для $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Тогда для тех же значений n, очевидно,

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Отсюда и следует, что $x_n \cdot \alpha_n$ есть бесконечно малая.

40. Арифметические операции над переменными. Следующие теоремы важны в том отношении, что с их помощью во многих случаях делается ненужным восхождение всякий раз к определению понятия предела — с разысканием по заданному ε соответствующего N, и т. д. Этим вычисление пределов значительно облегчается.

1) *Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, причем

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Из условия теоремы следует, что

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \tag{3}$$

где α_n и β_n — бесконечно малые. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Здесь $\alpha_n \pm \beta_n$ есть бесконечно малая по лемме 1 n° **39**; следовательно, можно утверждать, что переменная $x_n \pm y_n$ имеет предел, равный $a \pm b$, что и требовалось доказать.

Эта теорема и ее доказательство переносятся на случай любого конечного числа слагаемых.

2) *Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и произведение их также имеет конечный предел, и

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Исходя из тех же равенств (3), имеем на этот раз

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая. Отсюда и следует, что переменная $x_n y_n$ действительно имеет пределом ab.

Эта теорема может быть распространена на случай любого конечного числа сомножителей (например, методом математической индукции).

3) *Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

причем b отлично от нуля, то и отношение их также имеет конечный предел, а именно,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Пусть, например, $b > 0$; вставим между нулем и b число r. Тогда, согласно утверждению n° **36**, 1), начиная с некоторого места

$$y_n > r > 0,$$

так что во всяком случае $y_n \neq 0$. Ограничимся теми значениями номера n, для которых это выполняется; тогда отношение $\frac{x_n}{y_n}$ заведомо имеет смысл.

Исходя, попрежнему, из равенств (3), имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая. Множитель же при нем, на основании сказанного вначале, будет ограниченной переменной:

$$0 < \frac{1}{by_n} < \frac{1}{br}.$$

Следовательно, по лемме 2, всё произведение справа будет бесконечно малым, а оно представляет разность между переменной $\frac{x_n}{y_n}$ и числом $\frac{a}{b}$. Итак, предел $\frac{x_n}{y_n}$ есть $\frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

41. Неопределенные выражения. В предыдущем номере мы рассматривали выражения

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \tag{4}$$

и, в предположении, что переменные x_n и y_n стремятся к конечным пределам (из которых, в случае частного, предел y_n не должен был равняться нулю), устанавливали пределы каждого из этих выражений.

Оставлены были без рассмотрения случаи, когда пределы переменных x_n и y_n (один или оба) бесконечны или — если речь идет о частном — когда предел знаменателя нуль. Из этих случаев мы здесь остановимся лишь на четырех, представляющих некоторую важную и интересную особенность.

1°. Рассмотрим сначала частное $\frac{x_n}{y_n}$ и предположим, что обе переменные x_n и y_n одновременно стремятся к нулю. Здесь мы впервые сталкиваемся с совсем особым обстоятельством: хотя нам известны пределы x_n и y_n, но о пределе их отношения — не зная самих этих функций от n — никакого общего утверждения мы сделать не можем. *Этот предел, в зависимости от частного закона*

изменения обеих переменных, может иметь различные значения или даже вовсе не существовать. Следующие простые примеры поясняют это.

Пусть, скажем, $x_n = \frac{1}{n^2}$ и $y_n = \frac{1}{n}$; обе переменные стремятся к нулю. Их отношение $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$ также стремится к нулю. Если же, наоборот, положить $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, то, хотя они стремятся к нулю, на этот раз их отношение $\frac{x_n}{y_n} = n$ стремится к $+\infty$! Взяв же любое отличное от нуля число a и построив две бесконечно малые $x_n = \frac{a}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, видим, что отношение их имеет пределом a (так как тождественно равно a).

Наконец, если $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ (обе имеют пределом нуль), то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ оказывается вовсе не имеющим предела.

Таким образом, одно знание пределов переменных x_n и y_n в данном случае не позволяет еще судить о поведении их отношения: необходимо знать сами функции, т. е. закон их изменения вместе с n, и непосредственно исследовать отношение $\frac{x_n}{y_n}$. Для того чтобы характеризовать эту особенность, говорят, что, когда $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, *выражение* $\frac{x_n}{y_n}$ *представляет неопределенность вида* $\frac{0}{0}$.

2°. В случае, когда одновременно $x_n \to \pm\infty$ и $y_n \to \pm\infty$, имеет место подобное же обстоятельство. Не зная самих функций, общего утверждения о поведении их отношения сделать нельзя. Этот факт иллюстрируется примерами, вполне аналогичными приведенным в 1°:

$$x_n = n \to \infty, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = n^2 \to \infty; \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty;$$

$$x_n = an \to \pm\infty \ (a \gtrless 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = a \to a;$$

$x_n = [2 + (-1)^{n+1}]\, n \to \infty$, $y_n = n \to \infty$, $\frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}$ вовсе не имеет предела.

И в этом случае говорят, что *выражение* $\frac{x_n}{y_n}$ *представляет неопределенность*, на этот раз — *вида* $\frac{\infty}{\infty}$.

Обратимся к рассмотрению произведения $x_n y_n$.

3°. Если x_n стремится к нулю, в то время как y_n стремится к $\pm\infty$, то, исследуя поведение произведения x_ny_n, мы сталкиваемся с такой же особенностью, как и в пунктах 1° и 2°. Об этом свидетельствуют примеры:

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_ny_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad x_ny_n = n \to \infty;$$

$$x_n = \frac{a}{n} \to 0 \ (a \gtrless 0), \ y_n = n \to \infty, \ x_ny_n = a \to a;$$

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, \ y_n = n \to \infty, \ x_ny_n = (-1)^{n+1}$$ вовсе не имеет предела.

В связи с этим, при $x_n \to 0$ и $y_n \to \infty$, говорят, что *выражение x_ny_n представляет неопределенность вида* $0 \cdot \infty$.

Рассмотрим, наконец, сумму $x_n + y_n$.

4°. Здесь оказывается особым случай, когда x_n и y_n стремятся к бесконечности разных знаков: именно в этом случае о сумме $x_n + y_n$ ничего определенного сказать нельзя, не зная самих функций x_n и y_n. Различные возможности, представляющиеся здесь, иллюстрируются примерами:

$$x_n = 2n \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = n \to +\infty;$$
$$x_n = n \to +\infty, \quad y_n = -2n \to -\infty, \quad x_n + y_n = -n \to -\infty;$$
$$x_n = n + a \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = a \to a;$$
$$x_n = n + (-1)^{n+1} \to +\infty, \ y_n = -n \to -\infty, \ x_n + y_n = (-1)^{n+1}$$

вовсе не имеет предела.

Ввиду этого, при $x_n \to +\infty$ и $y_n \to -\infty$, говорят, что *выражение $x_n + y_n$ представляет неопределенность вида* $\infty - \infty$.

Таким образом, определить пределы арифметических выражений (4) по пределам переменных x_n и y_n, из которых они составлены, не всегда возможно. Мы нашли четыре случая, когда этого заведомо сделать нельзя: неопределенности вида

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \ \infty - \infty \ ^{*)}.$$

В этих случаях приходится, учитывая закон изменения x_n и y_n, непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Подобное исследование получило название раскрытия неопределенности. Далеко не всегда оно так просто, как в приведенных выше схематических примерах.

---

*) Конечно, символы эти лишены всякого числового смысла. Каждый из них является лишь краткой условной характеристикой для выражений одного из четырех типов неопределенности.

42. Распространение на случай функции от произвольной переменной. Сделаем снова замечание относительно общего случая. Так как здесь мы имеем в виду теоремы, в которых переменные связываются знаками равенства, неравенства или арифметических действий, мы, прежде всего, должны оговорить, что, соединяя две или несколько функций $f(x)$, $g(x)$, ... (определенных в одной и той же области $\mathscr{X}$) такими знаками, мы всегда подразумеваем, что их значения отвечают одному и тому же значению x.

Все эти теоремы можно было бы доказать аналогичным образом наново, как мы это сделали в n°**37**, но — и это важно подчеркнуть — *на деле вовсе нет необходимости их передоказывать*. Если, говоря о пределе функции, стоять на «точке зрения последовательностей», то, поскольку для переменных, зависящих от указателя n, теоремы доказаны, они верны и для функций в общем случае.

Для примера остановимся на теоремах 1), 2), 3) из n°**40**.

Пусть в области $\mathscr{X}$ (с точкой сгущения a) заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, и при стремлении x к a обе имеют конечные пределы

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$$

Тогда и функции

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5}$$

также имеют конечные пределы (в случае частного — в предположении, что $B \neq 0$), именно

$$A \pm B, \quad A \cdot B, \quad \frac{A}{B}.$$

На «языке последовательностей» данные соотношения расшифровываются так: если $\{x_n\}$ есть любая последовательность (отличных от a) значений x из $\mathscr{X}$, имеющая пределом a, то

$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B.$$

Если к этим двум функциям уже от натурального аргумента n применить доказанные теоремы, то получаем сразу:

$$\lim [f(x_n) \pm g(x_n)] = A \pm B, \quad \lim f(x_n) \cdot g(x_n) = A \cdot B,$$

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

а это (на «языке последовательностей») и выражает именно то, что нужно было доказать *).

*) В случае частного можно было бы заметить [аналогично тому, как мы это сделали для y_n в n°40, 3)], что для x, достаточно близких к a, знаменатель $g(x) \neq 0$, так что дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет смысл, по крайней мере, для этих значений x.

Таким же образом на общий случай, рассматриваемый нами теперь, переносится и сказанное в n° 41 относительно «неопределенных выражений», условно характеризуемых символами

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty.$$

Как и в простейшем случае, когда мы имели дело с функциями натурального аргумента, здесь для «раскрытия неопределенности» уже недостаточно знать лишь пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, а нужно учесть и самый закон их изменения. Примеры раскрытия неопределенностей читатель найдет в следующем номере.

Мы вернемся к этому вопросу в § 3 главы VII, где будут даны общие методы раскрытия неопределенностей уже с применением дифференциального исчисления.

43. Примеры. 1) Пусть $p(x)$ будет многочлен, целый относительно x, с постоянными коэффициентами:

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k\qquad (a_0\neq 0).$$

Поставим вопрос о пределе его при $x\to+\infty$. Если бы все коэффициенты этого многочлена были положительны (отрицательны), то сразу ясно, что пределом $p(x)$ будет $+\infty$ $(-\infty)$. Но в случае коэффициентов разных знаков одни члены стремятся к $+\infty$, другие к $-\infty$, и налицо неопределенность вида $\infty-\infty$.

Для раскрытия этой неопределенности представим $p(x)$ в виде

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{x^k}\right).$$

Так как все слагаемые в скобках, начиная со второго, при безграничном возрастании x будут бесконечно малыми, то выражение в скобках имеет пределом $a_0\neq 0$; первый же множитель стремится к $+\infty$. В таком случае все выражение стремится к $+\infty$ или $-\infty$, в зависимости от знака a_0.

Такой же результат, в частности, получится, если вместо непрерывно изменяющейся переменной x подставить натуральное число n.

Предоставляем читателю установить $\lim p(x)$ при $x\to-\infty$ (учитывая, на этот раз, четность или нечетность показателя k). Во всех случаях предел многочлена $p(x)$ совпадает с пределом его старшего члена a_0x^k.

Уничтожение «неопределенности» путем преобразования данного выражения, чем мы здесь и воспользовались, часто применяется для раскрытия неопределенности.

2) Если $q(x)$ есть такой же многочлен

$$q(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_{l-1}x+b_l\qquad (b_0\neq 0),$$

то частное $\frac{p(x)}{q(x)}$ при $x\to+\infty$ представит неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Преобразуя каждый из многочленов так, как это было сделано в примере 1), получим:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=x^{k-l}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_k}{x^k}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_l}{x^l}}.$$

Второй множитель здесь имеет конечный предел $\frac{a_0}{b_0} \neq 0$. Если степени обоих полиномов равны: $k = l$, таков же будет и предел отношения $\frac{p(x)}{q(x)}$. При $k > l$ первый множитель при $x \to +\infty$ тоже стремится к $+\infty$, так что рассматриваемое отношение стремится к $\pm\infty$ $\left(\text{с учетом знака } \frac{a_0}{b_0}\right)$. Наконец, при $k < l$ пределом будет нуль. Здесь также вместо x можно подставить натуральное число n.

Легко установить и предел $\frac{p(x)}{q(x)}$ при $x \to -\infty$. Во всех случаях предел отношения многочленов совпадает с пределом отношения их старших членов.

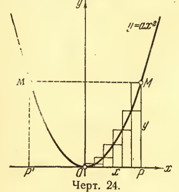
3) Найти площадь Q фигуры OPM, образованной частью OM параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$, отрезком OP оси x и отрезком PM (черт. 24).

Разобьем отрезок OP на n равных частей и построим на них ряд входящих и выходящих прямоугольников. Площади Q_n и Q'_n составленных из них ступенчатых фигур разнятся площадью $\frac{x}{n} \cdot y$ наибольшего прямоугольника. Отсюда разность $Q'_n - Q_n \to 0$ (при $n \to \infty$) и, так как

$$Q_n < Q < Q'_n,$$

очевидно,

$$Q = \lim Q_n = \lim Q'_n.$$



Черт. 24.

Так как высоты отдельных прямоугольников суть ординаты точек параболы, с абсциссами

$$\frac{1}{n}x,\ \frac{2}{n}x,\ \dots,\ \frac{n}{n}x = x,$$

и — в согласии с уравнением кривой — величина их равна, соответственно,

$$a \cdot \frac{1}{n^2}x^2,\ a \cdot \frac{2^2}{n^2}x^2,\ \dots,\ a \cdot \frac{n^2}{n^2}x^2,$$

то для Q'_n получаем выражение *)

$$Q'_n = \frac{ax^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Отсюда, если использовать пример 2,

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}.$$

Опираясь на это, легко получить, что площадь параболического сегмента $M'OM$ равна $\frac{4}{3}xy$, т. е. двум третям площади описанного прямоугольника (этот результат был известен еще Архимеду) **).

---

*) Здесь мы используем известную формулу для суммы квадратов первых n натуральных чисел.

**) Архимед — величайший из математиков древности (III в. до нашей эры).

Замечание. Общее определение площади криволинейной фигуры будет дано лишь в главе XII; там же примененный здесь метод вычисления площади будет обобщен на другие криволинейные фигуры [n° 196].

4) Найти пределы переменных:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

и, наконец,

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Выражения x_n и z_n представляют неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ (так как оба корня больше n, то они стремятся к бесконечности). Преобразуем, деля числитель и знаменатель на n:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Так как оба корня в знаменателе имеют пределом единицу *), то $x_n \to 1$ и $z_n \to 1$.

Выражение для y_n имеет своеобразную форму: каждое слагаемое этой суммы зависит от n, но и число их растет вместе с n. Так как каждое слагаемое меньше первого и больше последнего, то

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < y_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{т. е. } x_n < y_n < z_n.$$

Но (согласно уже найденному) переменные x_n и z_n стремятся к общему пределу — единице; следовательно, — по теореме 3) n°38 — к тому же пределу стремится и переменная y_n.

5) Вернемся к функции $f(x)$, рассмотренной в n° 18, 3° и определенной там тремя различными формулами — для разных x. Положим теперь сразу для всех x:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

Если $|x| > 1$, то имеем здесь неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которая легко раскрывается путем деления числителя и знаменателя на x^{2n}; мы получаем: $f(x) = 1$. При $|x| < 1$, очевидно, $x^{2n} \to 0$ и $f(x) = -1$. Наконец, если $x = \pm 1$, то числитель дроби постоянно равен нулю, а с ним и $f(x) = 0$. Это — в точности та же функция, но задана она на этот раз одной формулой.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$

Действительно,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1};$$

*) Это, например, для первого корня, следует из неравенств

$$1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n} \quad [\text{n}^\circ 38,\ 3],$$

но

$$1-|x|<\sqrt{1+x}<1+|x|,$$

так что

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1,$$

откуда и следует требуемый результат.

7) Предел [34, 5]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

часто используется для нахождения других пределов.

(а)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Очевидно,

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2;$$

так как выражение в скобках стремится к единице, то общий предел и будет $\frac{1}{2}$.

(б)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

И здесь преобразование легко приводит к уже изученным пределам:

$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Заметим, что $\cos x\to 1$ при $x\to 0$, как это вытекает, например, из предыдущего результата (а).

§ 3. МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ

44. Предел монотонной функции от натурального аргумента. Теоремы о существовании пределов функций, которые приводились до сих пор, имели такой характер: в предположении, что для одних функций пределы существуют, устанавливалось существование пределов для других функций, так или иначе связанных с первыми. Вопрос о признаках существования конечного предела для заданной функции, безотносительно к другим функциям, не ставился. Оставляя решение этого вопроса в общем виде до § 4, мы рассмотрим здесь один простой и важный частный класс функций, для которых он решается легко, причем, как всегда, начнем с простейшего случая — функции x_n от натурального аргумента.

Переменная x_n называется *возрастающей*, если

$$x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots,$$

т. е. если из $n' > n$ следует $x_{n'} > x_n$. Ее называют неубывающей, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots,$$

т. е. если из $n' > n$ следует лишь $x_{n'} \geqslant x_n$. Можно и в последнем случае называть переменную возрастающей, если придать этому термину более широкий смысл.

Аналогично устанавливается понятие об убывающей — в узком или широком смысле слова — функции от n: так называется переменная x_n, для которой, соответственно,

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$$

или

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots,$$

так что из $n' > n$ следует (смотря по случаю) $x_{n'} < x_n$ или лишь $x_{n'} \leqslant x_n$.

Переменные всех этих типов, изменяющиеся при возрастании n в одном направлении, объединяются под общим названием *монотонных*. Обычно о переменной этого типа говорят, что она «монотонно возрастает» или «монотонно убывает».

Одновременно с переменной x_n, зависящей от натурального указателя, и последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

принимаемых ею значений — в соответствующих случаях — также называется возрастающей или убывающей.

По отношению к монотонным переменным имеет место следующая

Теорема. *Пусть дана монотонно возрастающая переменная x_n. Если она ограничена сверху:*

$$x_n \leqslant M \qquad (M = \text{const};\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то необходимо имеет конечный предел, в противном же случае — она стремится к $+\infty$.

Точно так же всегда имеет предел и монотонно убывающая переменная x_n. Ее предел конечен, если она ограничена снизу, в противном же случае ее пределом служит $-\infty$ *).

Доказательство. Ограничимся случаем возрастающей, хотя бы в широком смысле, переменной x_n (случай убывающей переменной исчерпывается аналогично).

---

*) Легко понять, что все заключения остаются в силе и для переменной, которая лишь начиная с некоторого места становится монотонной (ибо — без влияния на предел переменной — любое число первых ее значений можно отбросить).

В тексте теоремы, вместо монотонной переменной x_n, можно было бы говорить о монотонной последовательности.

Допустим сначала, что эта переменная ограничена сверху. Тогда, по теореме n° **6**, для множества $\{x_n\}$ ее значений должна существовать (и конечная) точная верхняя граница:

$$a = \sup\{x_n\};$$

как мы покажем, именно это число и будет пределом переменной x_n.

Действительно, вспомним характерные свойства точной верхней границы [6]. Во-первых, для всех значений n будет

$$x_n \leqslant a.$$

Во-вторых, какое бы ни взять число $\varepsilon > 0$, найдется такое значение, скажем, x_N нашей переменной, которое превзойдет $a - \varepsilon$:

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Так как, ввиду монотонности переменной x_n (здесь мы впервые на это опираемся), при $n > N$ будет $x_n \geqslant x_N$, т. е. и подавно $x_n > a - \varepsilon$, то для этих значений номера n выполняются неравенства:

$$0 \leqslant a - x_n < \varepsilon, \quad \text{так что} \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\lim x_n = a$.

Пусть теперь переменная x_n не ограничена сверху. Тогда, сколь велико ни было бы число $E > 0$, найдется хоть одно значение переменной, которое больше E; пусть это будет x_N: $x_N > E$. Ввиду монотонности переменной x_n для $n > N$ и подавно

$$x_n > E,$$

а это и означает, что $\lim x_n = +\infty$.

Замечание. Наличие конечного предела у ограниченной монотонной переменной в первой половине прошлого века считалось чем-то само собою разумеющимся. Потребность в строгом доказательстве этого — фундаментальной важности — утверждения была фактически одним из поводов к созданию арифметической теории иррациональных чисел. Добавим, что упомянутое утверждение вполне эквивалентно свойству непрерывности множества вещественных чисел [n° 5].

Обратимся к примерам применения теоремы.

45. Примеры. 1) Рассмотрим выражение (считая $c > 0$)

$$x_n = \frac{c^n}{n!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. (Оно при $c > 1$ представляет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Так как

$$x_{n+1} = \frac{c}{n+1} x_n,$$

то, лишь только $n > c - 1$, переменная становится убывающей; в то же время снизу она ограничена, например, нулем. Следовательно, переменная

x_n — по теореме — имеет конечный предел, который мы обозначим через a.

Для того чтобы найти его, перейдем к пределу в написанном выше равенстве; так как x_{n+1} пробегает ту же последовательность значений, что и x_n (с точностью до первого члена), и имеет тот же предел a, то мы получим

$$a = a \cdot 0,$$

отсюда $a = 0$ и, окончательно,

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) Считая снова $c > 0$, определим теперь x_n так:

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \ldots$$

и вообще

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ корней}}.$$

Таким образом, x_{n+1} получается из x_n по формуле

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

Ясно, что переменная x_n монотонно возрастает. В то же время она ограничена сверху, например, числом $\sqrt{c} + 1$. Действительно, $x_1 = \sqrt{c}$ меньше этого числа; если допустить теперь, что какое-либо значение $x_n < \sqrt{c} + 1$, то и для следующего значения получаем

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Таким образом, наше утверждение оправдывается по методу математической индукции.

По основной теореме переменная x_n имеет некий конечный предел a. Для определения его перейдем к пределу в равенстве

$$x_{n+1}^2 = c + x_n;$$

мы получим, таким образом, что a удовлетворяет квадратному уравнению

$$a^2 = c + a.$$

Уравнение это имеет корни разных знаков; но интересующий нас предел a не может быть отрицательным, следовательно, равен именно *положительному* корню:

$$a = \frac{\sqrt{4c + 1} + 1}{2} \;^{*)}.$$

Оба примера дают повод к следующему *замечанию*. Доказанная теорема является типичной «теоремой существования»: в ней

---

*) Этот интересный пример по существу принадлежит Якобу Бернулли, который рассматривал его под видом вычисления выражения

$$\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c +}}} \text{ и т. д. до бесконечности.}$$

устанавливается факт существования предела, но не дается никакого приема для его вычисления. Тем не менее она имеет очень важное значение. С одной стороны, в теоретических вопросах часто только существование предела представляется нужным. С другой же стороны, во многих случаях возможность предварительно удостовериться в существовании предела важна тем, что открывает пути для его фактического вычисления. Так, в приведенных примерах именно знание факта существования предела позволило, с помощью перехода к пределу в некоторых равенствах, установить точное значение предела.

46. Лемма о вложенных промежутках. Остановимся теперь на сопоставлении двух монотонных переменных, изменяющихся «навстречу» одна другой.

Пусть даны монотонно возрастающая переменная x_n и монотонно убывающая переменная y_n, причем всегда

$$x_n < y_n. \tag{1}$$

Если их разность $y_n - x_n$ стремится к нулю, то обе переменные имеют общий конечный предел:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

Действительно, при всех значениях n имеем: $y_n \leqslant y_1$, а значит, ввиду (1), и $x_n < y_1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Возрастающая переменная x_n оказывается ограниченной сверху, следовательно, она имеет конечный предел

$$c = \lim x_n.$$

Аналогично, для убывающей переменной y_n будем иметь

$$y_n > x_n \geqslant x_1,$$

так что и она стремится к конечному пределу

$$c' = \lim y_n.$$

Но, по теореме 1) n° **40**, разность обоих пределов

$$c' - c = \lim (y_n - x_n),$$

т. е. по условию равна нулю, так что $c' = c$; это и требовалось доказать.

Доказанному утверждению можно придать другую форму, в которой оно чаще применяется.

Условимся говорить, что промежуток $[a', b']$ содержится в промежутке $[a, b]$ или вложен в него, если все точки первого промежутка принадлежат второму или, что то же самое, если

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b.$$

Геометрический смысл этого ясен.

Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных один в другой промежутков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

так что каждый последующий содержится в предыдущем, причем длины этих промежутков стремятся к нулю с возрастанием n:

$$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Тогда концы a_n и b_n промежутков (с разных сторон) стремятся к общему пределу

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

Это есть лишь перефразировка доказанной выше теоремы: согласно условию,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

так что левый конец a_n и правый конец b_n n-го промежутка играют здесь роль монотонных переменных x_n и y_n.

Впоследствии нам не раз придется опираться на это предложение, которое будем называть «леммой о вложенных промежутках».

47. Предел монотонной функции в общем случае. Перейдем теперь снова к рассмотрению функции $f(x)$ от произвольной переменной. И здесь вопрос о самом существовании предела функции

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

особенно просто решается для функций частного типа, представляющих обобщение понятия монотонной переменной x_n [44].

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области $\mathscr{X} = \{x\}$. Функция называется возрастающей (убывающей) в этой области, если для любой пары принадлежащих ей значений x и x'

из $x' > x$ следует $f(x') > f(x)$ $[f(x') < f(x)]$.

Если же

из $x' > x$ следует лишь $f(x') \geqslant f(x)$ $[f(x') \leqslant f(x)]$,

то функцию называют неубывающей (невозрастающей). Иногда удобнее и в этом случае называть функцию возрастающей (убывающей) — но в широком смысле.

Функции всех этих типов носят общее название монотонных. Для монотонной функции имеет место теорема, вполне аналогичная той теореме о монотонной переменной x_n, зависящей от n, которая была установлена в п°44.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает, хотя бы в широком смысле, в области $\mathscr{X}$, имеющей точкой сгущения число a, бо́льшее всех значений x (оно может быть конечным или равным $+\infty$). Если при этом функция ограничена сверху:*

$$f(x) \leqslant M \quad (\text{для всех } x \text{ из } \mathscr{X}),$$

то при $x \to a$ функция имеет конечный предел; в противном случае — она стремится к $+\infty$.

Доказательство. Допустим сначала, что функция $f(x)$ ограничена сверху, т. е. ограничено сверху множество $\{f(x)\}$ значений функции, отвечающих изменению x в области $\mathcal{X}$. Тогда для этого множества существует [n°6] конечная точная верхняя граница A. Докажем, что это число A и будет искомым пределом.

Прежде всего, для всех значений x

$$f(x) \leqslant A.$$

Далее, задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, по свойству точной верхней границы найдем такое значение $x' < a$, что $f(x') > A - \varepsilon$. Ввиду монотонности функции, для $x > x'$ и подавно будет: $f(x) > A - \varepsilon$, так что для упомянутых значений x выполнится неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это и доказывает наше утверждение, стоит лишь при a конечном взять $\delta = a - x'$ (так что неравенство $x > x'$ может быть написано в виде $x > a - \delta$), а при $a = +\infty$ взять $\Delta = x'$.

Если функция $f(x)$ сверху не ограничена, то каково бы ни было число E, найдется такое x', что $f(x') > \mathrm{E}$; тогда для $x > x'$ и подавно $f(x) > \mathrm{E}$, и т. д.

Предоставляем читателю преобразовать эту теорему для случая, когда предельное значение a меньше всех значений x, равно как и для случая монотонно убывающей функции.

Ясно, что теорема о монотонной переменной x_n в n°44 есть просто частный случай этой теоремы. Независимой переменной там был указатель n, областью изменения которого служил натуральный ряд $\mathcal{N} = \{n\}$, с точкой сгущения $+\infty$.

В последующем нам чаще придется в качестве области $\mathcal{X}$, в которой рассматривается функция $f(x)$, встречать сплошной промежуток $[a', a)$, где $a' < a$ и a — конечное число или $+\infty$, либо же — промежуток $(a, a']$, где $a' > a$ и a — конечное число или $-\infty$.

§ 4. ЧИСЛО e

48. Число e как предел последовательности. Мы используем здесь предельный переход для определения нового, до сих пор не встречавшегося нам числа, которое имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений.

Рассмотрим переменную

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и попытаемся применить к ней теорему n°44.

Так как с возрастанием показателя n основание степени здесь убывает, то «монотонный» характер переменной непосредственно

не усматривается. Для того чтобы убедиться в нем, прибегнем к разложению по формуле бинома:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

Если от x_n перейти теперь к x_{n+1}, т. е. увеличить n на единицу, то прежде всего добавится новый $(n+2)$-й (положительный) член, каждый же из написанных $n+1$ членов *увеличится*, ибо любой множитель в скобках вида $1-\frac{s}{n}$ заменится *бо́льшим множителем* $1-\frac{s}{n+1}$. Отсюда и следует, что

$$x_{n+1} > x_n,$$

т. е. переменная x_n оказывается *возрастающей*.

Теперь покажем, что она к тому же *ограничена сверху*. Опустив в выражении (1) все множители в скобках, мы этим увеличим его, так что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Заменив, далее, каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с третьей) числом 2, мы еще увеличим полученное выражение, так что в свою очередь

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но прогрессия $\left(\text{начинающаяся членом } \frac{1}{2}\right)$ имеет сумму, меньшую единицы, поэтому $y_n < 3$, а значит и подавно $x_n < 3$.

Отсюда уже следует, по теореме n° 44, что переменная x_n имеет конечный предел. По примеру Эйлера его обозначают всегда буквой e. Это число

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

7*

мы и имели в виду. Вот первые 15 знаков его разложения в десятичную дробь:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots$$

Хотя последовательность

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2; \ x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25;$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}3703\ldots; \ldots; x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048\ldots;\ldots$$

и сходится к числу e, но медленно, и ею пользоваться для приближенного вычисления числа e — невыгодно. В следующем номере мы изложим удобный прием для этого вычисления, а также попутно докажем, что e есть число иррациональное.

49. Приближенное вычисление числа e. Вернемся к равенству (1). Если фиксировать k и, считая $n > k$, отбросить все члены последней части, следующие за $(k+1)$-м, то получим неравенство

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Увеличивая здесь n до бесконечности, перейдем к пределу; так как все скобки имеют пределом единицу, то найдем:

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Это неравенство имеет место при любом натуральном k. Таким образом, имеем

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

откуда ясно [в силу теоремы 3) n° 38], что и

$$\lim y_n = e.$$

Переменная y_n для приближенного вычисления числа e гораздо удобнее, чем x_n. Оценим степень близости y_n к e. С этой целью рассмотрим сначала разность между любым значением y_{n+m} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, следующим за y_n, и самим y_n. Имеем

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right\}.$$

Если в скобках $\{\ldots\}$ заменить все множители в знаменателях дробей через $n+2$, то получим неравенство

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\},$$

которое лишь усилится, если заменить скобки суммой бесконечной прогрессии:

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Сохраняя здесь n неизменным, станем увеличивать m до бесконечности; переменная y_{n+m} (занумерованная значком m) принимает последовательность значений

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ \ldots,\ y_{n+m},\ \ldots,$$

очевидно сходящуюся к e. Поэтому получаем в пределе

$$e-y_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

или, наконец,

$$0<e-y_n<\frac{1}{n!\,n}\ ^{*)}.$$

Если через θ обозначить отношение разности $e-y_n$ к числу $\frac{1}{n!\,n}$ (оно, очевидно, содержится между нулем и единицей), то можно написать также

$$e-y_n=\frac{\theta}{n!\,n}.$$

Заменяя здесь y_n его развернутым выражением, мы и придем к важной формуле:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!\,n},\tag{2}$$

которая послужит отправной точкой для вычисления e. Отбрасывая последний, «дополнительный», член и заменяя каждый из оставленных членов его десятичным приближением, мы и получим приближенное значение для e.

Поставим себе задачей с помощью формулы (2) вычислить e, скажем, с точностью до $\frac{1}{10^4}$. Прежде всего нужно установить, каким взять число n (которое находится в нашем распоряжении), чтобы осуществить эту точность.

Вычисляя последовательно числа, обратные факториалам (см. приведенную табличку), мы видим, что при $n=7$ «дополнительный» член формулы (2) будет уже

$$\frac{\theta}{n!\,n}=\frac{\theta}{7!\,7}<0{,}00003,$$

так что, отбрасывая его, мы делаем погрешность, значительно меньшую поставленной границы. Остановимся же на этом значении n. Каждый из остальных членов обратим в десятичную дробь, округляя (в запас точности) на пятом знаке так, чтобы погрешность по абсолютной величине была меньше половины единицы на пятом месте, т. е. меньше $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$. Мы свели результаты вычислений в табличку. Рядом с приближенным числом

$$
\begin{aligned}
& 2{,}00000\\
\frac{1}{2!}&=0{,}50000\\
\frac{1}{3!}&=0{,}16667-\\
\frac{1}{4!}&=0{,}04167-\\
\frac{1}{5!}&=0{,}00833+\\
\frac{1}{6!}&=0{,}00139-\\
\frac{1}{7!}&=0{,}00020-\\
\hline
& 2{,}71826
\end{aligned}
$$

*) Так как (это легко проверить) $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$.

поставлен знак (+ или —), указывающий на знак поправки, которую необходимо было бы прибавить для восстановления точного числа.

Итак, как мы видели, поправка на отбрасывание дополнительного члена меньше $\frac{3}{10^5}$. Учитывая теперь еще и поправки на округление (с их знаками), легко сообразить, что суммарная поправка к полученному приближенному значению числа e лежит между

$$-\frac{2}{10^5} \quad \text{и} \quad +\frac{3,5}{10^5}.$$

Отсюда само число e содержится между дробями

$$2,71824 \quad \text{и} \quad 2,718295,$$

так что можно положить

$$e = 2,7182 + 0,0001.$$

Отметим, что та же формула (2) может служить и для доказательства иррациональности числа e.

Рассуждая от противного, попробуем допустить, что e равно рациональной дроби $\frac{m}{n}$; тогда, если именно для этого n написать формулу (2), будем иметь

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Умножив обе части этого равенства на $n!$, по сокращении знаменателей всех дробей, кроме последней, мы получим слева целое число, а справа — целое число с дробью $\frac{\theta}{n}$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает то, что требовалось.

50. Основная формула для числа e. Натуральные логарифмы. Число e в n°48 первоначально было определено как предел переменной, зависящей от натурального указателя:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

Теперь же мы установим более общий результат

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

Для этого [35] достаточно доказать, что имеют место порознь соотношения

$$\lim_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{4a}$$

Воспользуемся на этот раз определением предела «на языке последовательностей» [32].

Кстати, если и предел (3), рассматривая его как предел функции от n, истолковать «на языке последовательностей», то придем к равенству

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e, \tag{5}$$

какова бы ни была последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел, растущих вместе с номером k до бесконечности.

Пусть теперь x пробегает какую-нибудь последовательность $\{x_k\}$ положительных значений, стремящихся к нулю; можно считать, что все $x_k < 1$. Положим $n_k = E\left(\frac{1}{x_k}\right)$, так что

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \quad \text{и} \quad n_k \to +\infty.$$

Так как при этом

$$\frac{1}{n_k + 1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k},$$

то

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Два крайних выражения могут быть преобразованы так:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right),$$

причем, в силу (5),

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e, \text{ а также } \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \to e,$$

в то время как, очевидно,

$$1 + \frac{1}{n_k} \to 1, \quad 1 + \frac{1}{n_k + 1} \to 1.$$

Таким образом, оба упомянутых выражения стремятся к общему пределу e, а тогда [по теореме 3), 38] и заключенное между ними выражение также стремится к e:

$$\lim (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e.$$

Этим и завершается доказательство первого из соотношений (4а) «на языке последовательностей».

Для доказательства же второго из них предположим теперь, что последовательность $\{x_k\}$ состоит из отрицательных значений, стремящихся к нулю; будем считать $x_k > -1$. Если положить $x_k = -y_k$, то

$$1 > y_k > 0, \quad y_k \to 0.$$

Очевидно,

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right).$$

Так как, по доказанному, первый множитель последнего выражения стремится к e, второй же очевидно имеет пределом единицу, то и выражение слева также стремится к e. Формула (4) оправдана полностью.

Это замечательное свойство числа e лежит в основе всех его приложений. Именно оно делает особенно выгодным выбор этого числа в качестве основания для системы логарифмов. Логарифмы по основанию e называются *натуральными* и обозначаются знаком ln (logarithmus naturalis); в теоретических исследованиях пользуются исключительно натуральными логарифмами *).

Упомянем, что обычные, десятичные, логарифмы связаны с натуральными известной формулой:

$$\log x = \ln x \cdot M,$$

где M есть модуль перехода и равен

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,294\ldots;$$

это легко получить, если прологарифмировать по основанию 10 тождество

$$x = e^{\ln x}.$$

§ 5. ПРИНЦИП СХОДИМОСТИ

51. Частичные последовательности. Пусть дана некоторая последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n'},\ \ldots \qquad (1)$$

*) Эти логарифмы иногда ошибочно называют неперовыми по имени шотландского математика Непера (1550—1617) — изобретателя логарифмов. Сам Непер не имел понятия об основании системы логарифмов, ибо строил их своеобразно, совсем на другом принципе, но его логарифмы соответствуют логарифмам по основанию, близкому к $\frac{1}{e}$. Близкое к e основание имеют логарифмы его современника швейцарского математика Бюрги (1552—1632).

Рассмотрим, наряду с нею, какую-либо извлеченную из нее частичную последовательность

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \tag{2}$$

где $\{n_k\}$ есть некоторая последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots \tag{3}$$

Здесь роль номера, принимающего подряд все натуральные значения, играет уже не n, а k; n_k же представляет собой функцию от k, принимающую натуральные значения и, очевидно, стремящуюся к бесконечности при возрастании k.

Если последовательность (1) *имеет определенный предел* a *(конечный или нет), то тот же предел имеет и частичная последовательность* (2). Если же для последовательности (1) нет определенного предела, то это не исключает возможности существования предела для какой-либо частичной последовательности.

Пусть, например, $x_n = (-1)^{n+1}$; предела эта переменная не имеет. Если же заставить n пробегать лишь одни нечетные или одни четные значения, то частичные последовательности

$$x_1 = 1,\ x_3 = 1,\ \ldots,\ x_{2k-1} = 1,\ \ldots$$

и

$$x_2 = -1,\ x_4 = -1,\ \ldots,\ x_{2k} = -1,\ \ldots$$

будут иметь пределом, соответственно, число 1 или -1.

В случае неограниченной последовательности (1) иной раз оказывается невозможным выделение частичной последовательности (2), имеющей конечный предел [так будет, если сама последовательность (1) стремится к $\pm\infty$]. Наоборот, для ограниченной последовательности имеет место следующее утверждение, принадлежащее Больцано и Вейерштрассу *):

Лемма Больцано — Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности* (1) *всегда можно извлечь такую частичную последовательность* (2), *которая сходилась бы к конечному пределу.*

(Эта формулировка не исключает возможности и равных чисел в составе данной последовательности, что удобно в приложениях).

Доказательство. Пусть все числа x_n заключены между границами a и b. Разделим этот промежуток $[a, b]$ пополам, тогда хоть в одной половине будет содержаться бесконечное множество элементов данной последовательности, ибо, в противном случае, и во всем промежутке $[a, b]$ этих элементов содержалось бы конечное число, что невозможно. Итак, пусть $[a_1, b_1]$ будет та из половин, которая

---

*) Карл Вейерштрасс (1815—1897) — выдающийся немецкий математик.

содержит бесконечное множество чисел x_n (или, если обе половины таковы, то — любая из них).

Аналогично, из промежутка $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$ — под условием, чтобы в ней содержалось бесконечное множество чисел x_n, и т. д. Продолжая этот процесс, на k-й стадии его выделим промежуток $[a_k, b_k]$, также содержащий бесконечное множество чисел x_n; и так далее до бесконечности.

Каждый из построенных промежутков (начиная со второго) содержится в предыдущем, составляя его половину. Кроме того, длина k-го промежутка, равная

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

стремится к нулю с возрастанием k. Применяя сюда лемму о вложенных промежутках [n° **46**], заключаем, что a_k и b_k стремятся к общему пределу c.

Теперь построение частичной последовательности $\{x_{n_k}\}$ произведем индуктивно следующим образом. В качестве x_{n_1} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n нашей последовательности, содержащихся в $[a_1, b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n, с л е д у ю щ и х за x_{n_1} и содержащихся в $[a_2, b_2]$, и т. д. Вообще, в качестве x_{n_k} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n, с л е д у ю щ и х за р а н е е в ы д е л е н н ы м и $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ и содержащихся в $[a_k, b_k]$. Возможность такого выбора, производимого последовательно, обусловливается именно тем, что каждый из промежутков $[a_k, b_k]$ содержит б е с к о н е ч н о е м н о ж е с т в о чисел x_n, т. е. содержит элементы x_n со сколь угодно большими номерами.

Далее, так как

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{и} \quad \lim a_k = \lim b_k = c,$$

то по теореме 3), n° **38** и $\lim x_{n_k} = c$, что и требовалось доказать.

Метод, примененный при доказательстве этого утверждения и состоящий в последовательном делении пополам рассматриваемых промежутков, часто будет нам полезен и в других случаях.

Лемма Больцано — Вейерштрасса значительно облегчает доказательство многих трудных теорем, как бы вбирая в себя основную трудность рассуждения. Мы воспользуемся ею в ближайшем же номере.

52. Условие существования конечного предела для функции от натурального аргумента. Пусть дана переменная x_n, пробегающая последовательность значений (1); займемся, наконец, вопросом об о б щ е м п р и з н а к е с у щ е с т в о в а н и я к о н е ч н о г о п р е д е л а для этой переменной (или для последовательности — что то же). Само о п р е д е л е н и е предела для этой цели служить не может,

ибо в нем фигурирует уже тот предел, о существовании которого идет речь. Мы нуждаемся в признаке, который использовал бы лишь то, что нам дано, а именно — последовательность (1) значений переменной.

Поставленную задачу решает следующая замечательная теорема, принадлежащая Больцано (1817) и Коши (1821); ее называют часто *принципом сходимости*.

Теорема. *Для того чтобы переменная x_n имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, чтобы неравенство*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \tag{4}$$

выполнялось, лишь только $n > N$ и $n' > N$.

Как видит читатель, суть дела здесь в том, чтобы значения переменной м е ж д у с о б о й безгранично сближались по мере возрастания их номеров. Обратимся к д о к а з а т е л ь с т в у.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть переменная x_n имеет определенный конечный предел, скажем, a. По самому определению предела [n°28], каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такой номер N, что для $n > N$ всегда имеет место неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем теперь любые д в а номера $n > N$ и $n' > N$; для них одновременно будет

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Этим необходимость условия доказана. Значительно труднее доказать его.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Здесь именно мы и применим лемму предыдущего номера.

Итак, пусть условие выполнено, и по заданному $\varepsilon > 0$ найден такой номер N, что для $n > N$ и $n' > N$ имеет место неравенство (4). Если n' при этом фиксировать, то, переписав (4) так:

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon,$$

видим, что переменная x_n, во всяком случае, будет ограниченной: ее значения для $n > N$ содержатся между числами $x_{n'} - \varepsilon$ и $x_{n'} + \varepsilon$, и нетрудно эти границы раздвинуть так, чтобы охватить и первые N значений: $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Тогда, по лемме Больцано — Вейерштрасса, можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу c:

$$\lim x_{n_k} = c.$$

Покажем, что к этому пределу стремится вообще и переменная x_n. Можно выбрать k настолько большим, чтобы было

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon$$

и, одновременно, $n_k > N$. Следовательно, в (4) можно взять $n' = n_k$:

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

и, сопоставляя оба эти неравенства, окончательно находим

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \quad (\text{для } n > N),$$

что и доказывает наше утверждение *).

Замечание. Хотя и Больцано и Коши утверждали достаточность высказанного ими условия существования конечного предела, но без строгой теории вещественных чисел, разумеется, доказать этого не могли.

53. Условие существования конечного предела для функции любого аргумента. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая — функции $f(x)$, заданной в области $\mathcal{X} = \{x\}$, для которой a служит точкой сгущения. Для существования конечного предела этой функции при стремлении x к a может быть установлен такой же признак, как и в случае функции от натурального аргумента. Формулировку его мы дадим параллельно для случая конечного a и для случая $a = +\infty$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ при стремлении x к a имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta > 0$ ($\Delta > 0$), чтобы неравенство*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

выполнялось, лишь только

$$|x - a| < \delta \quad \text{и} \quad |x' - a| < \delta \quad (x > \Delta \text{ и } x' > \Delta).$$

Доказательство проведем в предположении, что a — конечное число.

Необходимость. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

*) Число 2ε в такой же мере «произвольно малое» число, как и ε. Если угодно, можно было сначала взять не ε, а $\frac{\varepsilon}{2}$, тогда мы здесь получили бы ε. Подобные вещи впредь мы будем предоставлять читателю.

Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если только $|x - a| < \delta$. Пусть и $|x' - a| < \delta$, так что и

$$|A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда получаем

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

в предположении, что одновременно

$$|x - a| < \delta \quad \text{и} \quad |x' - a| < \delta.$$

Достаточность может быть установлена, например, путем сведения вопроса к уже рассмотренному случаю. Путь для этого нам открывает само определение понятия предела функции «на языке последовательностей» [n° **32**].

Итак, пусть условие, сформулированное в теореме, выполнено, и по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ установлено соответствующее $\delta > 0$.

Если $\{x_n\}$ есть любая последовательность значений из $\mathscr{X}$, сходящаяся к a, то, по определению предела последовательности, найдется такой номер N, что для $n > N$ будет: $|x_n - a| < \delta$. Возьмем, наряду с n, и другой номер $n' > N$, так что одновременно

$$|x_n - a| < \delta \quad \text{и} \quad |x_{n'} - a| < \delta.$$

Тогда, в силу самого выбора числа δ,

$$|f(x_n) - f(x_{n'})| < \varepsilon.$$

Это неравенство выполняется при единственном требовании, чтобы оба номера n и n' были больше N. Это означает, что для функции $f(x_n)$ от натурального аргумента n выполняется условие n° **52** и, таким образом, последовательность

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

имеет конечный предел, скажем, A.

Остается еще установить, что этот предел A не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$.

Пусть же $\{x'_n\}$ будет другая последовательность, извлеченная из $\mathscr{X}$ и также сходящаяся к a. Соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(x'_n)\}$, по доказанному, имеет некоторый конечный предел A'. Для доказательства того, что $A' = A$, допустим противное. Составим тогда новую последовательность

$$x_1,\ x'_1,\ x_2,\ x'_2,\ \ldots,\ x_n,\ x'_n,\ \ldots$$

значений x, явно сходящуюся к a. Ей отвечает последовательность значений функции

$$f(x_1),\ f(x_1'),\ f(x_2),\ f(x_2'),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(x_n'),\ \ldots,$$

вовсе не имеющая предела, так как частичные последовательности ее членов, стоящих на нечетных или четных местах, стремятся к различным пределам [n°51]. А это противоречит доказанному. Итак, при $x \to a$ функция $f(x)$ стремится, действительно, к конечному пределу A.

§ 6. КЛАССИФИКАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ВЕЛИЧИН

54. Сравнение бесконечно малых. Предположим, что в каком-либо исследовании одновременно рассматривается ряд бесконечно малых величин

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

которые, вообще говоря, будут функциями от одной и той же переменной, скажем x, стремящейся к конечному или бесконечному пределу a.

Во многих случаях представляет интерес сравнение названных бесконечно малых между собой по характеру их приближения к нулю. В основу сравнения двух бесконечно малых α и β кладется поведение их отношения *). На этот счет установим два соглашения:

I. *Если отношение* $\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(\text{а с ним и } \frac{\alpha}{\beta}\right)$ *имеет конечный и отличный от нуля предел, то бесконечно малые α и β считаются величинами одного порядка.*

II. *Если же отношение* $\frac{\beta}{\alpha}$ *само оказывается бесконечно малым* $\left(\text{а отношение } \frac{\alpha}{\beta} \text{ — бесконечно большим}\right)$, *то бесконечно малая β считается величиной высшего порядка, чем бесконечно малая α, и одновременно бесконечно малая α будет низшего порядка, чем бесконечно малая β.*

Например, если $\alpha = x \to 0$, то по сравнению с этой бесконечно малой одного порядка с нею будут бесконечно малые

$$\sin x,\ \sqrt{1+x}-1,$$

ибо, как мы знаем [n°34, 5); n°43, 6)],

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

*) Мы будем считать, что переменная, на которую мы делим, не обращается в нуль, по крайней мере, для значений x, достаточно близких к a.

Наоборот, бесконечно малые

$$1-\cos x, \quad \operatorname{tg} x-\sin x \tag{1}$$

будут, очевидно, высшего порядка, чем x [n° **43**, 7), (а) и (б)].

Конечно, может случиться, что отношение двух бесконечно малых не стремится ни к какому пределу, не будучи и бесконечно большим; например, если взять [см. **34**, 6) и 7)]

$$\alpha=x, \quad \beta=x \sin \frac{1}{x},$$

то их отношение, равное $\sin \frac{1}{x}$, при $x \rightarrow 0$ предела не имеет. В таком случае говорят, что две бесконечно малые несравнимы между собой.

Заметим, что если бесконечно малая β оказывается высшего порядка, чем бесконечно малая α, то этот факт записывают так:

$$\beta=o(\alpha).$$

Например, можно писать:

$$1-\cos x=o(x), \quad \operatorname{tg} x-\sin x=o(x) \quad \text{и т. п.}$$

Таким образом символ $o(\alpha)$ служит о б щ и м обозначением для бесконечно малой высшего порядка, чем α. Этим удобным обозначением мы впредь будем пользоваться.

55. Шкала бесконечно малых. Иной раз встречается надобность в более точной сравнительной характеристике поведения бесконечно малых, в выражении порядков их — ч и с л а м и. В этом случае, прежде всего, в качестве своего рода «эталона» выбирают одну из фигурирующих в данном исследовании бесконечно малых (скажем, α); ее называют о с н о в н о й. Конечно, выбор основной бесконечно малой в известной мере произволен, но обычно берут простейшую из всех. Если рассматриваемые величины, как мы предположили, являются функциями от x и становятся бесконечно малыми при стремлении x к a, то в зависимости от того, будет ли a нулем, конечным и отличным от нуля числом или бесконечностью, естественно за основную бесконечно малую взять, соответственно,

$$|x|, \quad |x-a|, \quad \frac{1}{|x|}.$$

Далее, из степеней основной бесконечно малой α (мы будем считать $\alpha>0$) с различными положительными показателями, α^k, составляют как бы шкалу для оценки бесконечно малых более сложной природы *).

*) Легко видеть, что при $k>0$ величина α^k будет бесконечно малой одновременно с α.

III. *Уславливаются считать бесконечно малую β величиной k-го порядка (относительно основной бесконечно малой α), если β и α^k ($k > 0$) будут величинами одного порядка*, т. е. если отношение $\frac{\beta}{\alpha^k}$ имеет конечный и отличный от нуля предел.

Теперь, например, можно, не довольствуясь утверждением, что бесконечно малые (1) (при $x \to 0$) будут величинами высшего порядка, чем $\alpha = x$, сказать точно, что одна из них есть бесконечно малая второго порядка, а другая — третьего порядка относительно $\alpha = x$, ибо [43, 7), (а) и (б)]

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

56. Эквивалентные бесконечно малые. Остановимся теперь на одном особенно важном частном случае бесконечно малых одного порядка.

IV. *Будем называть бесконечно малые α и β эквивалентными (в знаках: $\alpha \sim \beta$), если их разность $\gamma = \beta - \alpha$ оказывается величиной высшего порядка, чем каждая из бесконечно малых α и β*:

$$\gamma = o(\alpha) \quad \text{и} \quad \gamma = o(\beta).$$

Впрочем, достаточно потребовать, чтобы γ была высшего порядка, чем одна из этих бесконечно малых, потому что, если, например, γ высшего порядка чем α, то она будет также высшего порядка чем β. Действительно, из того, что $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0$, следует, что и

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} = \lim \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1 + \frac{\gamma}{\alpha}} = 0.$$

Рассмотрим две эквивалентные бесконечно малые α и β, так что $\beta = \alpha + \gamma$, где $\gamma = o(\alpha)$. Если приближенно положить $\beta \doteq \alpha$ *), то — по мере уменьшения обеих величин — стремится к нулю не только абсолютная погрешность от этой замены, представляемая величиной $|\gamma|$, но и относительная погрешность, равная $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$. Иными словами, *при достаточно малых значениях α и β можно со сколь угодно большой относительной точностью положить* $\beta = \alpha$. На этом основана, при приближенных выкладках, замена сложных бесконечно малых эквивалентными им простыми.

Установим полезный критерий эквивалентности двух бесконечно малых, который в сущности дает второе определение этого понятия, равносильное ранее данному:

---

*) Знак $\doteq$ означает приближенное равенство.

Для того чтобы две бесконечно малые α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Положив $\beta - \alpha = \gamma$, будем иметь

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Отсюда сразу и вытекает наше утверждение. Действительно, если $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$, то $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, т. е. γ есть бесконечно малая высшего порядка чем α, и $\beta \sim \alpha$. Обратно, если дано, что $\beta \sim \alpha$, то $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, а тогда $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$.

С помощью этого критерия, например, видно, что при $x \to 0$ бесконечно малая $\sin x$ эквивалентна x, а $\sqrt{1+x} - 1$ эквивалентно $\frac{1}{2}x$. Отсюда — приближенные формулы:

$$\sin x \doteq x, \quad \sqrt{1+x} - 1 \doteq \frac{1}{2}x.$$

Доказанное свойство эквивалентных бесконечно малых приводит к использованию их при раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$, т. е. при разыскании предела отношения двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$. Каждая из них при этом может быть заменена, без влияния на предел, любой эквивалентной ей бесконечно малой.

Действительно, если $\bar{\alpha} \sim \alpha$ и $\bar{\beta} \sim \beta$, т. е.

$$\lim \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1 \quad \text{и} \quad \lim \frac{\beta}{\bar{\beta}} = 1,$$

то отношение

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\bar{\beta}} \cdot \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\alpha},$$

отличающееся от отношения $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ множителями, стремящимися к единице, имеет предел одновременно с ним (и притом тот же).

Если удается выбрать $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ достаточно простыми, то это может сразу значительно упростить задачу; например,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

Из доказанного вытекает также, что *две бесконечно малые, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой.*

57. Выделение главной части. Если выбрана основная бесконечно малая α, то *простейшими* бесконечно малыми естественно считать величины вида $c \cdot \alpha^k$, где c — постоянный коэффициент и $k > 0$. Пусть бесконечно малая β будет k-го порядка относительно α, т. е.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c,$$

где c — конечное и отличное от нуля число. Тогда

$$\lim \frac{\beta}{c\alpha^k} = 1,$$

и бесконечно малые β и $c\alpha^k$ оказываются эквивалентными: $\beta \sim c\alpha^k$. Эта *простейшая бесконечно малая $c\alpha^k$, эквивалентная данной бесконечно малой β, называется ее главной частью* (*или главным членом*).

Пользуясь установленными выше результатами, кроме уже указанных простых примеров, легко выделить главные части выражений:

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2, \quad \operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2} x^3.$$

Здесь $x \to 0$, и именно $\alpha = x$ является основной бесконечно малой.

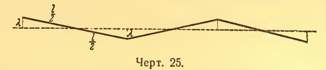
Пусть $\beta \sim c\alpha^k$, т. е. $\beta = c\alpha^k + \gamma$, где $\gamma = o(\alpha^k)$. Можно представить себе, что из бесконечно малой γ снова выделен главный член: $\gamma = c'\alpha^{k'} + \delta$, где $\delta = o(\alpha^{k'})$ $(k' > k)$ и т. д.

Этот процесс последовательного выделения из бесконечно малой простейших бесконечно малых все возрастающих порядков можно продолжать и дальше.

Мы ограничиваемся в настоящем параграфе установлением общих понятий, иллюстрируя их лишь немногими примерами. В последующем мы укажем систематический прием как для построения главной части данной бесконечно малой величины, так и для дальнейшего выделения из нее простейших бесконечно малых, о котором только что шла речь.

58. Задачи. Для иллюстрации изложенных соображений приведем две задачи, в которых они используются.

1) Пусть прямолинейное расстояние на местности измеряется с помощью мерной рейки длиной l метров. Так как фактически рейка прикладывается не точно вдоль измеряемой прямой, то результат измерения оказывается



Черт. 25.

несколько больше истинной длины. Сделаем самое невыгодное предположение, именно, что рейка прикладывается зигзагом, так что ее концы отстоят от прямой поочередно то в одну, то в другую сторону на расстояние λ *м* (черт. 25). Требуется оценить погрешность.

При однократном прикладывании рейки абсолютная погрешность равна разности между длиной l рейки и ее проекцией на измеряемую прямую; проекция же эта будет:

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

Воспользовавшись приближенной формулой

$$\sqrt{1+x}\doteq 1+\frac{1}{2}x$$

при $x=-\frac{4\lambda^2}{l^2}$ (что оправдано, ввиду малости величины λ относительно l), заменим выражение для проекции следующими:

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}.$$

В таком случае упомянутая погрешность есть $\frac{2\lambda^2}{l}$, а **относительная** погрешность, очевидно, будет $\frac{2\lambda^2}{l^2}$. Та же относительная погрешность сохранится и при многократном прикладывании рейки.

Если для этой погрешности установлена граница δ, т. е. должно быть $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$, то отсюда $\lambda<l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$.

Например, при измерении двухметровой рейкой ($l=2$) для достижения относительной точности в 0,001 нужно, чтобы уклонение λ не превосходило $2\sqrt{0{,}0005}\doteq 0{,}045$ *м* или 4,5 *см*.

2) При разбивке дуг окружностей на местности имеет значение следующая задача: *найти отношение стрелы $f=DB$ дуги ABC окружности к стреле $f_1=D_1B_1$ половины AB_1B этой дуги* (черт. 26).

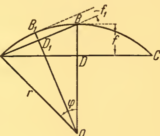
Если положить радиус окружности равным r,

$$\measuredangle AOB=\varphi, \text{ то } \measuredangle AOB_1=\frac{\varphi}{2} \text{ и}$$

$$f=DB=r(1-\cos\varphi),\; f_1=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{f}{f_1}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$



Черт. 26.

Выражение это слишком сложно, чтобы им удобно было пользоваться на практике. Найдем его предел при $\varphi\to 0$ (ибо для достаточно малых φ это выражение можно приближенно заменить его пределом). С этой целью заменяем числитель и знаменатель их главными частями и сразу находим:

$$\lim\frac{f}{f_1}=\lim\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2}=4.$$

Итак, для дуг, соответствующих небольшому центральному углу, приближенно можно считать, что *стрела полудуги вчетверо меньше стрелы дуги.* Это позволяет последовательно строить промежуточные точки дуги, для которой даны концы и середина.

59. Классификация бесконечно больших. Заметим, что для бесконечно больших величин может быть развита подобная же классификация. Как и в n°**54**, будем считать рассматриваемые величины функциями от одной и той же переменной x, которые становятся бесконечно большими, когда x стремится к a.

I. *Две бесконечно большие y и z считаются величинами одного порядка, если их отношение $\frac{z}{y}$ (а с ним и $\frac{y}{z}$) имеет конечный и отличный от нуля предел.*

II. *Если же отношение $\frac{z}{y}$ само оказывается бесконечно большим (а обратное отношение $\frac{y}{z}$ — бесконечно малым), то z считается бесконечно большой величиной высшего порядка чем y, и, одновременно, y будет бесконечно большой низшего порядка чем z.*

В случае, когда отношение $\frac{z}{y}$ ни к какому конечному пределу не стремится и в то же время не будет бесконечно большим, бесконечно большие y и z — несравнимы.

При одновременном рассматривании ряда бесконечно больших величин, одну из них (скажем, y) выбирают в качестве основной, и с ее степенями сравнивают остальные бесконечно большие. Например, если (как мы предположили выше) все они суть функции от x и становятся бесконечно большими при $x \to a$, то в качестве основной бесконечно большой обыкновенно берут $|x|$, если $a = \pm\infty$, и $\frac{1}{|x-a|}$ при a конечном.

III. *Бесконечно большая z называется величиной k-го порядка (относительно основной бесконечно большой y), если z и y^k будут одного порядка*, т. е., если отношение $\frac{z}{y^k}$ имеет конечный и отличный от нуля предел.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ (И РАЗРЫВЫ) ФУНКЦИИ

60. Определение непрерывности функции в точке. С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции. Установление этого понятия в точной форме принадлежит Больцано и Коши, имена которых уже упоминались.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некотором промежутке $\mathscr{X}$, и пусть x_0 будет точка этого промежутка, так что в ней функция имеет определенное значение $f(x_0)$.

Когда устанавливалось понятие предела функции при стремлении x к x_0 [п°п° **32**, **33**]

$$\lim_{x \to x_0} f(x),$$

неоднократно подчеркивалось, что значения x_0 переменная x не принимает; это значение могло даже не принадлежать области определения функции, а если и принадлежало, то значение $f(x_0)$ при образовании упомянутого предела не учитывалось.

Однако особый интерес представляет именно случай, когда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Говорят, что *функция* $f(x)$ *непрерывна при значении* $x = x_0$ (*или в точке* $x = x_0$), *если выполняется это соотношение*; *если же оно нарушено, то* говорят, что *при этом значении* (*или в этой точке*) *функция имеет разрыв* *).

В случае непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 (и, очевидно, только в этом случае), при вычислении предела функции $f(x)$ при

*) Эта терминология связана с интуитивным представлением о непрерывности и разрывах кривой: функция непрерывна, если непрерывен ее график, точки разрыва функции отвечают точкам разрыва графика. На деле, однако, понятие непрерывности для кривой само требует обоснования, и простейший путь к нему лежит как раз через непрерывность функции!

$x \to x_0$ становится безразличным, будет ли x в своем стремлении к x_0 принимать, в частности, и значение x_0 или нет.

Определение непрерывности функции можно сформулировать в других терминах. Переход от значения x_0 к другому значению x можно себе представить так, что значению x_0 придано приращение $\Delta x = x - x_0$ *). Новое значение функции $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ разнится от старого $y_0 = f(x_0)$ на приращение

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δy в этой точке стремилось к нулю вместе с приращением Δx независимой переменной. Иными словами: *непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции.*

Возвращаясь к основному определению (1), раскроем его содержание «на языке последовательностей» [32]. Смысл непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 сводится к следующему: *какую бы последовательность значений x из $\mathscr{X}$:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

сходящуюся к x_0, ни взять, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

сходится к $f(x_0)$.

Наконец, «на языке ε-δ» [n°33] непрерывность выразится так: *каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство*

$$|x - x_0| < \delta \text{ влечет за собой } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство, таким образом, должно выполняться в достаточно малой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0.

Отметим, что, вычисляя предел (1), мы могли приближать x к x_0 и справа и слева, лишь бы x не выходило за пределы промежутка $\mathscr{X}$.

Установим теперь понятие об односторонней непрерывности или одностороннем разрыве функции в данной точке.

Говорят, что *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа (слева)*, если выполняется предельное соотношение:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0 + 0) &= \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \\ [\text{или } f(x_0 - 0) &= \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

*) В анализе принято приращение величин $x, y, t, \ldots$ обозначать через $\Delta x, \Delta y, \Delta t, \ldots$ Эти обозначения надлежит рассматривать как цельные символы, не отделяя Δ от x, и т. п.

Если же то или другое из этих соотношений не осуществляется, то *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв, соответственно, справа или слева.*

По отношению к левому (правому) концу промежутка $\mathscr{X}$ *), в котором функция определена, может идти речь, очевидно, только о непрерывности или разрыве справа (слева). Если же x_0 есть внутренняя точка промежутка $\mathscr{X}$, т. е. не совпадает ни с одним из его концов, то для того, чтобы выполнялось равенство (1), выражающее непрерывность функции в точке x_0 в обычном смысле, необходимо и достаточно, чтобы имели место одновременно оба равенства (2) [**35**]. Иными словами, *непрерывность функции в точке x_0 равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно справа и слева.*

Условимся говорить, для упрощения речи, что функция непрерывна в промежутке $\mathscr{X}$, если она непрерывна в каждой точке промежутка в отдельности.

61. Условие непрерывности монотонной функции. Рассмотрим функцию $f(x)$, монотонно возрастающую (убывающую) **) в промежутке $\mathscr{X}$ [n°**47**]. Этот промежуток может быть как конечным, так и бесконечным, замкнутым, полуоткрытым или открытым. Мы установим сейчас простой признак, с помощью которого для функций подобного типа сразу может быть обнаружена ее непрерывность во всем промежутке $\mathscr{X}$.

Теорема. *Если множество значений монотонно возрастающей (убывающей) функции $f(x)$, которые она принимает, когда x изменяется в промежутке $\mathscr{X}$, содержится в некотором промежутке $\mathscr{Y}$ и заполняет его сплошь, то функция $f(x)$ в промежутке $\mathscr{X}$ непрерывна* ***).

Возьмем любую точку x_0 из $\mathscr{X}$ и, предполагая, что она не является правым концом этого промежутка, докажем непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 справа; аналогично может быть доказана и непрерывность функции в точке x_0 слева, если x_0 не есть левый конец рассматриваемого промежутка, а отсюда по совокупности и следует заключение теоремы.

Точка $y_0 = f(x_0)$ принадлежит промежутку $\mathscr{Y}$, не являясь его правым концом (ведь в $\mathscr{X}$ есть значения $x > x_0$, а им отвечают в $\mathscr{Y}$ значения $y = f(x) > y_0$). Пусть ε будет произвольно малое положительное число; впрочем, мы предположим его вдобавок настолько малым, чтобы и значение $y_1 = y_0 + \varepsilon$ тоже принадлежало проме-

*) Предполагая, что этот конец есть число конечное.

**) Для отчетливости мы будем предполагать функцию монотонно возрастающей в строгом смысле (хотя теорема верна и для монотонных функций в широком смысле).

***) Впоследствии [70] мы покажем, что то условие, которое здесь сформулировано как достаточное для непрерывности монотонной функции, является и необходимым.

жутку $\mathcal{Y}$. Так как по предположению $\mathcal{Y}=\{f(x)\}$, то в $\mathcal{X}$ найдется такое значение x_1, что будет

$$f(x_1)=y_1,$$

причем, очевидно, $x_1>x_0$ (ибо, при $x\leqslant x_0$, и $f(x)\leqslant y_0$). Положим $\delta=x_1-x_0$, так что $x_1=x_0+\delta$. Если теперь

$$0<x-x_0<\delta, \quad \text{т. е.} \quad x_0<x<x_1,$$

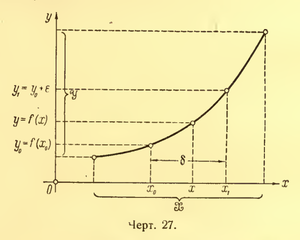
то

$$y_0<f(x)<y_1=y_0+\varepsilon \quad \text{или} \quad 0<f(x)-f(x_0)<\varepsilon.$$

Это и значит, что

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0),$$

т. е. функция $f(x)$, действительно, непрерывна в точке x_0 справа, что и требовалось доказать. Чертеж 27 служит иллюстрацией проведенного рассуждения.



Черт. 27.

62. Арифметические операции над непрерывными функциями. Прежде чем перейти к примерам непрерывных функций, установим следующее простое предложение, которое позволит легко расширить их число.

Теорема. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в одном и том же промежутке $\mathcal{X}$ и обе непрерывны в точке x_0, то в той же точке будут непрерывны и функции*

$$f(x)\pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(последняя — при условии, что $g(x_0)\neq 0$).

Это непосредственно вытекает из теорем о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, имеющих порознь пределы [n° **42**].

Остановимся для примера на частном двух функций. Предположение о непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 равносильно наличию равенств

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Но отсюда, по теореме о пределе частного (так как предел знаменателя не нуль), имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

а это равенство и означает, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

63. Непрерывность элементарных функций. 1°. Целая и дробная рациональная функция. Непрерывность функций от x, сводящихся к постоянной или к самому x, непосредственно ясна. Отсюда, на основании теоремы предыдущего номера, вытекает уже непрерывность любого одночленного выражения

$$ax^m = a \cdot \overbrace{x \cdot x \ldots x}^{m \text{ раз}}$$

как произведения непрерывных функций, а затем — и многочлена (целой рациональной функции)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

как суммы непрерывных функций. Во всех упомянутых случаях непрерывность имеет место во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Очевидно, наконец, что и частное двух многочленов (дробная рациональная функция):

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

также будет непрерывно при каждом значении x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

Непрерывность остальных элементарных функций мы установим опираясь на теорему n° **61**.

2°. Показательная функция $y = a^x (a > 1)$ монотонно возрастает при изменении x в промежутке $\mathscr{X} = (-\infty, +\infty)$. Ее значения положительны и заполняют весь промежуток $\mathscr{Y} = (0, +\infty)$; это видно из существования логарифма $x = \log_a y$ для любого $y > 0$ [n° **12**]. Следовательно, показательная функция непрерывна при любом значении x.

3°. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Ограничиваясь случаем $a > 1$, видим, что эта функция возрастает

при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=(0, +\infty)$. К тому же она, очевидно, принимает любое значение y из промежутка $\mathscr{Y}=(-\infty, +\infty)$, именно, для $x=a^y$. Отсюда — ее непрерывность.

4°. Степенная функция $y=x^{\mu}$ ($\mu \gtrless 0$) при возрастании x от нуля до $+\infty$ возрастает, если $\mu>0$, и убывает, если $\mu<0$. При этом она принимает любое положительное значение y (для $x=y^{\frac{1}{\mu}}$), следовательно, и она непрерывна *).

5°. Тригонометрические функции:

$$y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=\operatorname{tg} x, \quad y=\operatorname{ctg} x,$$
$$y=\sec x, \quad y=\csc x.$$

Остановимся сначала на функции $y=\sin x$. Ее непрерывность, скажем, при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, вытекает из ее монотонности в этом промежутке, да еще из того факта (устанавливаемого геометрически), что при этом она принимает каждое значение между -1 и 1. То же относится и к любому промежутку вида

$$\left[k\pi-\frac{\pi}{2}, \ k\pi+\frac{\pi}{2}\right] \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Окончательно видим, что функция $y=\sin x$ непрерывна для всех значений x. Аналогично устанавливается и непрерывность функции $y=\cos x$, также при любом значении x.

Отсюда, по теореме предыдущего номера, вытекает уже непрерывность функций

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

Исключение представляют для первых двух — значения вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, обращающие $\cos x$ в нуль, а для последних двух — значения вида $k\pi$, обращающие $\sin x$ в нуль.

Наконец, упомянем

6°. Обратные тригонометрические функции:

$$y=\arcsin x, \quad y=\arccos x, \quad y=\operatorname{arctg} x, \quad y=\operatorname{arcctg} x.$$

Первые две непрерывны в промежутке $[-1, 1]$, а последние — в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Доказательство предоставляем читателю.

---

*) Если $\mu>0$, то значение нуль включается как в промежуток изменения x, так и в промежуток изменения y; при $\mu<0$ значение нуль не включается. Далее, если μ — целое число $\pm n$ или дробное $\pm\frac{p}{q}$ с нечетным знаменателем, то степень x^{μ} можно рассматривать и для $x<0$; непрерывность ее для этих значений устанавливается аналогично.

Резюмируя, можно сказать, таким образом, что основные элементарные функции оказываются непрерывными во всех точках, где они имеют смысл, т. е. в соответствующих естественных областях их определения.

64. Суперпозиция непрерывных функций. Обширные классы непрерывных функций могут быть построены с помощью суперпозиции функций, непрерывность которых уже известна. В основе этого лежит следующая

Теорема. *Пусть функция $\varphi(y)$ определена в промежутке $\mathcal{Y}$, а функция $f(x)$ — в промежутке $\mathcal{X}$, причем значения последней функции не выходят за пределы $\mathcal{Y}$, когда x изменяется в $\mathcal{X}$. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 из $\mathcal{X}$, а $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$ из $\mathcal{Y}$, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ будет непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Зададимся произвольным числом $\varepsilon>0$. Так как $\varphi(y)$ непрерывна при $y=y_0$, то по ε найдется такое $\sigma>0$, что

$$\text{из } |y-y_0|<\sigma \text{ следует } |\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

С другой стороны, ввиду непрерывности $f(x)$ при $x=x_0$, по σ найдется такое $\delta>0$, что

$$\text{из } |x-x_0|<\delta \text{ следует } |f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\sigma.$$

По самому выбору числа σ отсюда следует, далее,

$$|\varphi(f(x))-\varphi(y_0)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|<\varepsilon.$$

Этим «на языке ε-δ» и доказана непрерывность функции $\varphi(f(x))$ в точке x_0.

Например, если степенную функцию x^μ $(x>0)$ представить в виде функции

$$x^\mu=e^{\mu\ln x},$$

которая получается от суперпозиции логарифмической и показательной функций, то из непрерывности последних двух функций уже будет вытекать непрерывность степенной функции.

65. Вычисление некоторых пределов. Непрерывность функций многообразно может быть использована при вычислении пределов *).

---

*) Фактически мы иной раз это делали и раньше; так, в примере 6) n° 43 мы попутно установили непрерывность функции $\sqrt{x}$ при $x=1$ и использовали ее, а в примере 7) (б) так же поступили по отношению к функции $\cos x$ при $x=0$.

Здесь мы, опираясь на непрерывность элементарных функций, установим ряд важных пределов, которые понадобятся нам в следующей главе:

1) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \qquad \left(\dfrac{0}{0}\right)$,

2) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \qquad \left(\dfrac{0}{0}\right)$,

3) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu \qquad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Имеем

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}};$$

так как выражение, стоящее справа под знаком логарифма, при $\alpha \to 0$ стремится к e [п°**50**, (4)], то (по непрерывности логарифмической функции) его логарифм стремится к $\log_a e$, что и требовалось доказать.

Отметим частный случай доказанной формулы, когда речь идет о натуральном логарифме $(a = e)$:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

В простоте этого результата и коренятся, по существу, те преимущества, которые представляет натуральная система логарифмов.

Обращаясь к формуле 2), положим $a^\alpha - 1 = \beta$; тогда при $\alpha \to 0$ (по непрерывности показательной функции) и $\beta \to 0$. Имеем, далее, $\alpha = \log_a(1+\beta)$, так что, если воспользоваться уже доказанным результатом:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a,$$

что и требовалось доказать.

Если, в частности, взять $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то получится интересная формула:

$$\lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a \qquad (\infty \cdot 0).$$

Наконец, для доказательства формулы 3), положим $(1+\alpha)^\mu - 1 = \beta$; при $\alpha \to 0$ (по непрерывности степенной функции) будет и $\beta \to 0$. Логарифмируя равенство $(1+\alpha)^\mu = 1+\beta$, получим, что

$$\mu \cdot \ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta).$$

С помощью этого соотношения преобразуем данное нам выражение так:

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

По доказанному оба отношения

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \quad \text{и} \quad \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

стремятся к единице, так что всё произведение имеет пределом μ, что и требовалось доказать.

Предел, рассмотренный в n° **43**, 6), получается отсюда, как частный случай, при $\mu=\frac{1}{2}$.

66. Степенно-показательные выражения. Рассмотрим теперь степенно-показательное выражение u^v, где u и v являются функциями от одной и той же переменной x, с областью изменения $\mathcal{X}$, имеющей точку сгущения x_0; в частности, это могут быть две функции u_n и v_n от натурального аргумента.

Пусть существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to x_0} u=a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x} v=b,$$

причем $a>0$. Требуется найти предел выражения u^v.

Представим его в виде

$$u^v=e^{v\cdot\ln u};$$

функции v и $\ln u$ имеют пределы

$$\lim_{x\to x_0} v=b, \quad \lim_{x\to x_0} \ln u=\ln a$$

(здесь использована непрерывность логарифмической функции), так что

$$\lim_{x\to x_0} v\cdot\ln u=b\cdot\ln a.$$

Отсюда — по непрерывности показательной функции — окончательно

$$\lim_{x\to x_0} u^v=e^{b\cdot\ln a}=a^b.$$

Предел выражения u^v можно установить и в других случаях, когда известен предел c произведения $v\cdot\ln u$ — конечный или бесконечный. При конечном c искомый предел будет, очевидно, e^c; если же $c=-\infty$ или $+\infty$, то этот предел, соответственно, будет 0 или $+\infty$ [n° **34**, 2].

Самое же определение предела $c=\lim\{v\cdot\ln u\}$ — лишь по заданным пределам a и b — возможно всегда, кроме случаев, когда это произведение при $x\to x_0$ представляет неопределенность

вида $0\cdot\infty$. Легко сообразить, что исключительные случаи отвечают таким комбинациям значений a и b:

$$a=1,\qquad b=\pm\infty;$$
$$a=0,\qquad b=0;$$
$$a=+\infty,\qquad b=0.$$

В этих случаях говорят, что *выражение* u^v *представляет неопределенность вида* 1^∞, 0^0, ∞^0 *) (смотря по случаю). Для решения вопроса о пределе выражения u^v здесь мало знать лишь пределы функций u и v, а нужно непосредственно учесть закон, по которому они стремятся к своим пределам.

Выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при $n\to\infty$, или более общее выражение $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, при $\alpha\to 0$, имеющее пределом e, дает пример неопределенности вида 1^∞.

Как уже указывалось, общие методы раскрытия неопределенностей всех видов будут даны в § 3 главы VII.

67. Классификация разрывов. Примеры. Остановимся подробнее на вопросе о непрерывности и разрыве функций в точке x_0, скажем, справа. Предполагая, что функция $f(x)$ в некотором промежутке $[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ справа от этой точки определена, видим, что для непрерывности необходимо и достаточно: во-первых, чтобы существовал конечный предел $f(x_0+0)$ функции $f(x)$ при стремлении x к x_0 справа и, во-вторых, чтобы этот предел был равен значению $f(x_0)$ функции в точке x_0.

Поэтому легко дать себе отчет в том, при каких обстоятельствах для функции $f(x)$ в точке x_0 справа появляется разрыв. Может случиться, что хотя конечный предел $f(x_0+0)$ и существует, но он не равен значению $f(x_0)$; такой разрыв называют *обыкновенным* или *разрывом первого рода* **). Но может быть и так, что предел $f(x_0+0)$ бесконечен, или его вовсе нет; тогда говорят о *разрыве второго рода*.

Если функция $f(x)$ определена только в промежутке $(x_0, x_0+h]$, но существует конечный предел

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то стоит лишь дополнительно определить функцию в точке x_0, положив $f(x_0)$ равным именно этому пределу, чтобы функция оказалась непрерывной в точке x_0 справа. Это обычно мы и будем впредь подразумевать. Впрочем, если функция определена и слева от x_0 — в промежутке $[x_0-h, x_0]$, и существует конечный предел

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x),$$

то восстановить непрерывность функции в точке x_0 можно лишь при условии совпадения обоих пределов.

---

*) Относительно самих этих символов можно было бы повторить сказанное в сноске на стр. 87.

**) В этом случае говорят также, что функция $f(x)$ в точке x_0 справа имеет скачок, по величине равный $f(x_0+0)-f(x_0)$.

Наконец, если для функции $f(x)$, определенной в промежутке $(x_0, x_0+h]$, конечного предела в точке x_0 справа не существует, то говорят, что функция имеет в точке x_0 справа *разрыв второго рода*, несмотря на то, что она в этой точке вовсе не определена: в этом случае, как бы дополнительно ни определить функцию при $x = x_0$, она неизбежно будет здесь иметь разрыв!

Примеры. 1) Рассмотрим функцию $y = E(x)$ (график ее представлен на черт. 5). Если x_0 не целое число и $E(x_0) = m$, т. е. $m < x_0 < m+1$, то и для всех значений x в промежутке $(m, m+1)$ будет $E(x) = m$, так что непрерывность функции в точке x_0 непосредственно ясна.

Иначе обстоит дело, если x_0 равно целому числу m. Справа в этой точке будет иметь место непрерывность, ибо правее $x_0 = m$, именно для значений x в $(m, m+1)$ будет $E(x) = m$, так что и $E(m+0) = m = E(m)$. Наоборот, левее $x_0 = m$, для значений x в $(m-1, m)$, очевидно, $E(x) = m-1$; отсюда и $E(m-0) = m-1$, что не равно значению $E(m)$, и слева в точке $x_0 = m$ функция имеет обыкновенный разрыв или скачок!

2) Для функции

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \qquad (\text{при } x \neq 0)$$

точка $x = 0$ есть точка разрыва второго рода с обеих сторон; именно в ней функция и справа и слева обращается в бесконечность:

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^3} = +\infty, \qquad f(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

3) Функция

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad (\text{при } x \neq 0),$$

рассмотренная в n°34, 6), в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода с обеих сторон, так как не существует вовсе предела этой функции в названной точке ни справа, ни слева.

4) Наоборот, если взять функцию [n°34, 7)]

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \qquad (\text{при } x \neq 0)$$

для которой, как мы видели, существует предел

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

то, положив $f(0) = 0$, мы восстановим непрерывность и при $x = 0$.

5) Определим, наконец, две функции равенствами

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}} \ (a > 1), \qquad f_2(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

при $x \neq 0$ и дополнительным условием

$$f_1(0) = f_2(0) = 0.$$

Как мы видели в n°35,

$$f_1(+0) = +\infty, \qquad f_1(-0) = 0,$$

$$f_2(+0) = \frac{\pi}{2}, \qquad f_2(-0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, в точке $x=0$ для первой функции справа — разрыв второго рода, а слева — непрерывность; для второй функции — с обеих сторон скачки. [Ср. черт. 22 и 23.]

Остановимся в заключение на важном классе обычно рассматриваемых функций — монотонных или кусочно-монотонных *) — и покажем, что для них могут иметь место разве лишь обыкновенные разрывы. Это следует из того, что для такой функции $f(x)$ в каждой точке x_0, принадлежащей промежутку $\mathcal{X}$, где функция определена, всегда существуют конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ (или — один из них, если x_0 является концом промежутка $\mathcal{X}$). Пусть, например, функция $f(x)$ монотонно возрастает, и x_0 не будет левым концом промежутка $\mathcal{X}$; тогда для $x<x_0$ значения $f(x)$ ограничены сверху числом $f(x_0)$ и по теореме п° 47, действительно, существует конечный предел

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

§ 2. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

68. Теорема об обращении функции в нуль. Займемся теперь изучением основных свойств функции, непрерывной в некотором промежутке. Интересные и сами по себе, эти свойства в дальнейшем изложении часто будут служить основой для различных умозаключений.

Первым на путь строгого обоснования их стал Больцано (1817), а вслед за ним — Коши (1821). Им и принадлежит приводимая ниже важная теорема.

Первая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b необходимо найдется точка c, в которой функция обращается в нуль*:

$$f(c)=0 \qquad (a<c<b).$$

Теорема имеет очень простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси x на другую, то она пересекает эту ось (черт. 28).

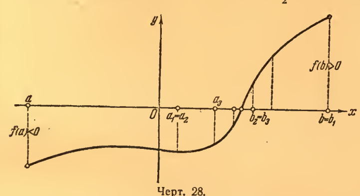
Доказательство мы проведем по методу деления промежутка [п°**51**]. Для определенности положим, что $f(a)<0$, а $f(b)>0$. Разделим промежуток $[a, b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Может случиться, что функция $f(x)$ обратится в нуль в этой точке, тогда теорема доказана: можно положить $c=\frac{a+b}{2}$. Пусть же $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$; тогда на концах одного из промежутков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

*) Функция называется кусочно-монотонной, если промежуток ее определения может быть разложен на конечное число частичных промежутков, в каждом из которых в отдельности функция монотонна.

функция будет принимать значения разных знаков (и притом отрицательное значение на левом конце и положительное — на правом). Обозначив этот промежуток через $[a_1, b_1]$, имеем

$$f(a_1) < 0, \qquad f(b_1) > 0.$$

Разделим пополам промежуток $[a_1, b_1]$ и снова отбросим тот случай, когда $f(x)$ обращается в нуль в середине $\frac{a_1 + b_1}{2}$ этого проме-



Черт. 28.

жутка, ибо тогда теорема доказана. Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из половин промежутка, для которой

$$f(a_2) < 0, \qquad f(b_2) > 0.$$

Продолжим этот процесс построения промежутков. При этом либо мы после конечного числа шагов наткнемся в качестве точки деления на точку, где функция обращается в нуль, — и доказательство теоремы завершится, — либо получим бесконечную последовательность вложенных один в другой промежутков. Остановимся на этом последнем случае. Тогда для n-го промежутка $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ будем иметь

$$f(a_n) < 0, \qquad f(b_n) > 0, \tag{1}$$

причем длина его, очевидно, равна

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}. \tag{2}$$

Построенная последовательность промежутков удовлетворяет условиям леммы о вложенных промежутках [n°46], ибо, ввиду (2), $\lim (b_n - a_n) = 0$; поэтому обе переменные a_n и b_n стремятся к общему пределу

$$\lim a_n = \lim b_n = c,$$

который, очевидно, принадлежит $[a, b]$ [36, 3)]. Покажем, что именно эта точка c удовлетворяет требованию теоремы.

9 Зак. 1413. Г. М. Фихтенгольц. I

Переходя к пределу в неравенствах (1) и используя при этом непрерывность функции (в частности, в точке $x=c$), получим, что одновременно

$$f(c)=\lim f(a_n)\leqslant 0 \quad \text{и} \quad f(c)=\lim f(b_n)\geqslant 0,$$

так что, действительно, $f(c)=0$. Теорема доказана.

Заметим, что требование непрерывности функции $f(x)$ в замкнутом промежутке $[a, b]$ — существенно: функция, имеющая разрыв хоть в одной точке, может перейти от отрицательного значения к положительному и не обращаясь в нуль. Так будет, например, с функцией $f(x)=E(x)-\frac{1}{2}$, которая нигде не принимает значения нуль, хотя $f(0)=-\frac{1}{2}$, а $f(1)=\frac{1}{2}$ (скачок при $x=1$).

69. Применение к решению уравнений. Доказанная теорема имеет применение при решении уравнений.

Рассмотрим, например, алгебраическое уравнение нечетной степени (с вещественными коэффициентами)

$$f(x)\equiv a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0.$$

При достаточно больших по абсолютной величине значениях x многочлен имеет знак старшего члена, т. е. при положительном x — знак a_0, а при отрицательном x — обратный знак. Так как многочлен есть непрерывная функция, то, меняя знак, он в промежуточной точке необходимо обращается в нуль. Отсюда: *всякое алгебраическое уравнение нечетной степени* (*с вещественными коэффициентами*) *имеет по крайней мере один вещественный корень.*

Теоремой Больцано—Коши можно пользоваться не только для установления существования корня, но и для приближенного его вычисления. (Это и было отправной точкой зрения для Коши при доказательстве теоремы, помещенной им в разделе «О численном решении уравнений»). Поясним сказанное примером. Пусть $f(x)=x^4-x-1$. Так как $f(1)=-1$, $f(2)=13$, то многочлен имеет корень между 1 и 2. Разделим этот промежуток $[1, 2]$ на 10 равных частей точками 1,1; 1,2; 1,3; ... и станем последовательно вычислять:

$$f(1{,}1)=-0{,}63\ldots;\quad f(1{,}2)=-0{,}12\ldots;\quad f(1{,}3)=+0{,}55;\ldots$$

Видим, что корень содержится между 1,2 и 1,3. Разделив и этот промежуток на 10 частей, найдем:

$$f(1{,}21)=-0{,}06\ldots;\quad f(1{,}22)=-0{,}04\ldots;\quad f(1{,}23)=+0{,}058\ldots;\ \ldots$$

Теперь ясно, что корень лежит между 1,22 и 1,23; таким образом, мы уже знаем значение корня с точностью до 0,01 и т. д. *).

70. Теорема о промежуточном значении. Доказанная в п°69 теорема непосредственно обобщается следующим образом:

---

*) Впрочем, практически этот путь невыгоден из-за большого количества вычислений; существуют приемы, гораздо быстрее ведущие к цели (они указываются в дифференциальном исчислении).

Вторая теорема Больцано—Коши. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения*

$$f(a)=A \quad \text{и} \quad f(b)=B.$$

Тогда, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка c между a и b, что

$$f(c)=C.^{*})$$

Доказательство. Будем считать, например,

$$A<B, \quad \text{так что } A<C<B.$$

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x)-C$. Эта функция непрерывна в промежутке и на концах его имеет разные знаки:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0, \qquad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

Тогда, по первой теореме, между a и b найдется точка c, для которой $\varphi(c)=0$, т. е.

$$f(c)-C=0 \quad \text{или} \quad f(c)=C,$$

что и требовалось доказать.

Мы установили, таким образом, важное свойство функции $f(x)$, непрерывной в промежутке: *переходя от одного своего значения к другому, функция хоть раз принимает в качестве значения каждое промежуточное число.*

Это свойство, на первый взгляд, кажется вскрывающим самую сущность непрерывности функции. Однако легко построить заведомо разрывные функции, которые все же этим свойством обладают. Например, функция [n° **67**, 3)]

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \quad (x\neq 0), \quad f(0)=0$$

в любом промежутке, содержащем точку разрыва $x=0$, принимает все вообще возможные для нее значения — от -1 до $+1$ **).

Из доказанного свойства непрерывной функции вытекает такое (по существу равносильное ему)

Следствие. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в каком-либо промежутке $\mathscr{X}$ (замкнутом или нет, конечном или*

---

*) Очевидно, что первая теорема Больцано — Коши есть частный случай этой: если A и B — разных знаков, то в качестве C можно взять и нуль.

**) Недаром еще Больцано подчеркивал, что указанное свойство есть следствие непрерывности, но его нельзя класть в основу определения непрерывности.

бесконечном), то принимаемые ею значения сами также заполняют сплошь некоторый промежуток.

Обозначим множество значений функции $\{f(x)\}$ через $\mathcal{Y}$. Пусть

$$m = \inf \mathcal{Y}, \qquad M = \sup \mathcal{Y}\text{ *)}$$

и l есть произвольное число между m и M:

$$m < l < M.$$

Необходимо найдутся значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ (x_1 и x_2 взяты из промежутка $\mathcal{X}$), такие, что

$$m \leqslant f(x_1) < l < f(x_2) \leqslant M;$$

это вытекает из самого определения точных границ числового множества. Но тогда, по доказанной теореме, существует между x_1 и x_2 такое значение $x = x_0$ (очевидно, также принадлежащее $\mathcal{X}$), что $f(x_0)$ в точности равно l; следовательно, это число входит в множество $\mathcal{Y}$.

Таким образом, $\mathcal{Y}$ представляет собой промежуток с концами m и M (которые сами могут ему принадлежать или нет — смотря по случаю; ср. n° 73).

Мы видели в n° 61, что в случае монотонной функции только что сформулированное свойство функции влечет за собой ее непрерывность. Что так будет не всегда, показывает приведенный выше пример.

Замечание. Для того частного случая, когда рассматриваемая функция представляет собой целый многочлен, обе теоремы высказывались задолго до строгого их доказательства в общем виде. Например, у Эйлера в его «Введении в анализ» мы находим — для указанного случая — полную формулировку теоремы настоящего номера, но без убедительного обоснования; эта теорема затем применяется к вопросу о существовании вещественных корней алгебраических уравнений [ср. n°69] **). Эйлер — подобно другим авторам — иной раз пользуется и геометрическими соображениями. Наконец, упомянем, что Лагранж ***) прямо начинает свой «Трактат о решении численных уравнений всех степеней» с аналитического доказательства (для многочлена!) теоремы n° 68, основанного на разложении на множители.

71. Существование обратной функции. Применим изученные в предыдущем номере свойства непрерывной функции к установлению, при некоторых предположениях, существования однозначной обратной функции и ее непрерывности [ср. n°23].

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) ****) и непрерывна в некотором промежутке $\mathcal{X}$. Тогда в соответствующем промежутке $\mathcal{Y}$ значений этой функции*

---

*) Напоминаем читателю, что если множество $\mathcal{Y}$ не ограничено сверху (снизу), то мы условились в n°6 полагать $\sup \mathcal{Y} = +\infty$ ($\inf \mathcal{Y} = -\infty$).

**) Стр. 44—46 русского перевода (см. сноску на стр. 48).

***) Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813) — знаменитый французский математик и механик.

****) В строгом смысле слова (это здесь существенно).

существует однозначная обратная функция $x=g(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Доказательство. Ограничимся случаем возрастающей функции. Мы видели выше [см. следствие], что значения непрерывной функции $f(x)$ заполняют сплошь некоторый промежуток $\mathcal{Y}$, так что для каждого значения y_0 из этого промежутка найдется хоть одно такое значение x_0 (из $\mathcal{X}$), что

$$f(x_0)=y_0.$$

Но ввиду монотонности этой функции такое значение может найтись только одно: если x больше или меньше x_0, то, соответственно, и $f(x)$ больше или меньше y_0.

Сопоставляя именно это значение x_0 произвольно взятому y_0 из $\mathcal{Y}$, мы получим однозначную функцию

$$x=g(y),$$

обратную для функции $y=f(x)$.

Легко видеть, что эта функция $g(y)$, подобно $f(x)$, также монотонно возрастает. Пусть

$$y'<y'' \quad \text{и} \quad x'=g(y'), \quad x''=g(y'');$$

тогда, по самому определению функции $g(y)$, одновременно

$$y'=f(x') \text{ и } y''=f(x'').$$

Если бы было $x'>x''$, то, в силу возрастания функции $f(x)$, было бы и $y'>y''$, что противоречит условию. Не может быть и $x'=x''$, ибо тогда было бы и $y'=y''$, что также противоречит условию. Итак, возможно только неравенство $x'<x''$, так что $g(y)$, действительно, возрастает.

Наконец, чтобы доказать непрерывность функции $x=g(y)$, достаточно сослаться на теорему в n°61, условия которой выполнены: названная функция монотонна и ее значения, очевидно, заполняют сплошь промежуток $\mathcal{X}$ *).

С помощью доказанной теоремы можно наново установить ряд уже известных нам результатов.

Например, если применить ее к функции x^n (n — натуральное число) в промежутке $\mathcal{X}=[0, +\infty)$, то придем к существованию и непрерывности (арифметического) корня

$$x=\sqrt[n]{y} \text{ для } y \text{ в } \mathcal{Y}=[0, +\infty).$$

72. Теорема об ограниченности функции. Если функция $f(x)$ определена (следовательно, принимает конечные значения) для всех

*) Какое бы x из $\mathcal{X}$ ни взять, стоит лишь положить $y=f(x)$, чтобы для этого y функция $g(y)$ имела своим значением именно взятое x.

значений x в некотором конечном промежутке, то это не влечет за собой с необходимостью ограниченности функции, т. е. ограниченности множества $\{f(x)\}$ принимаемых ею значений. Например, пусть $f(x)$ определена так:

$$f(x)=\frac{1}{x}, \text{ если } 0<x\leqslant 1 \text{ и } f(0)=0;$$

функция эта принимает только конечные значения, но она не ограничена, ибо при приближении x к нулю может принимать сколь угодно большие значения. Заметим попутно, что в полуоткрытом промежутке $(0, 1]$ она непрерывна, но в точке $x=0$ имеет разрыв.

Иначе обстоит дело с функциями, непрерывными в замкнутом промежутке.

Первая теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена и снизу и сверху, т. е. существуют такие постоянные и конечные числа m и M, что*

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Доказательство поведем от противного: допустим, что функция $f(x)$ при изменении x в промежутке $[a, b]$ оказывается неограниченной, скажем, сверху.

В таком случае для каждого натурального числа n найдется в промежутке $[a, b]$ такое значение $x=x_n$, что

$$f(x_n)\geqslant n. \tag{3}$$

По лемме Больцано—Вейерштрасса [n°51], из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу:

$$x_{n_k}\to x_0 \quad (\text{при } k\to+\infty),$$

причем, очевидно, $a\leqslant x_0\leqslant b$. Вследствие непрерывности функции в точке x_0 тогда должно быть и

$$f(x_{n_k})\to f(x_0),$$

а это невозможно, так как из (3) следует, что

$$f(x_{n_k})\to+\infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

73. Наибольшее и наименьшее значения функции. Мы знаем, что бесконечное числовое множество, даже ограниченное, может не иметь в своем составе наибольшего (наименьшего) элемента. Если функция $f(x)$ определена и даже ограничена в некотором промежутке изменения x, то в составе множества ее значений $\{f(x)\}$ может не оказаться наибольшего (наименьшего). В этом случае точная

верхняя (нижняя) граница значений функции $f(x)$ не достигается в названном промежутке. Так будет обстоять дело, например, с функцией

$$f(x) = x - E(x)$$

(график ее представлен на черт. 29). При изменении x в любом промежутке $[0, b]$ $(b \geqslant 1)$ точной верхней границей значений функции будет единица, но она не достигается, так что наибольшего значения функция не имеет.

Читателю, вероятно, ясна связь этого обстоятельства с наличием у рассматриваемой функции разрывов при натуральных значениях x. Действительно, для непрерывных в замкнутом промежутке функций имеет место:

Черт. 29.

Вторая теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней границ.*

Иными словами, *в промежутке* $[a, b]$ *найдутся такие точки* x_0 и x_1, *что значения* $f(x_0)$ и $f(x_1)$ будут, *соответственно, наибольшим и наименьшим из всех значений функции* $f(x)$.

Доказательство. Положим

$$M = \sup\{f(x)\};$$

по предыдущей теореме, это — число конечное. Предположим (вопреки тому, что нужно доказать), что всегда $f(x) < M$, т. е., что граница M не достигается. В таком случае, можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Так как, по предположению, знаменатель здесь в нуль не обращается, то эта функция будет непрерывна, а следовательно (по предыдущей теореме), ограничена: $f(x) \leqslant \mu$ $(\mu > 0)$. Но отсюда легко получить, что тогда

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu},$$

т. е. число $M - \frac{1}{\mu}$, меньшее чем M, оказывается верхней границей для значений функции $f(x)$, чего быть не может, ибо M есть точная верхняя граница этих значений. Полученное противоречие доказывает теорему: в промежутке $[a, b]$ найдется такое значение x_0, что $f(x_0) = M$ будет наибольшим из всех значений $f(x)$.

Аналогично может быть доказано утверждение и относительно наименьшего значения.

Отметим, что приведенное доказательство есть чистое «доказательство существования». Средств для вычисления, например, значения $x = x_0$ никаких не дано. Впоследствии [в главе VII, § 1], правда, при более тяжелых предположениях относительно функции, мы научимся фактически находить значения независимой переменной, доставляющие функции наибольшее или наименьшее значения.

Если функция $f(x)$ при изменении x в каком-либо промежутке $\mathscr{X}$ ограничена, то ее колебанием в этом промежутке называется разность

$$\omega = M - m$$

между ее точными верхней и нижней границами. Иначе можно определить колебание ω как точную верхнюю границу абсолютных величин разностей $f(x'') - f(x')$, где x' и x'' принимают независимо одно от другого произвольные значения в промежутке $\mathscr{X}$:

$$\omega = \sup_{x',\, x''} \{|f(x'') - f(x')|\}.$$

Когда речь идет о непрерывной функции $f(x)$ в замкнутом конечном промежутке $\mathscr{X} = [a, b]$, то, как следует из доказанной теоремы, колебанием будет попросту *разность между наибольшим и наименьшим значениями функции* в этом промежутке.

В этом случае промежуток $\mathscr{Y}$ значений функции есть замкнутый промежуток $[m, M]$, и колебание дает его длину.

74. Понятие равномерной непрерывности. Если функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathscr{X}$ (замкнутом или нет, конечном или бесконечном) и непрерывна в точке x_0 этого промежутка, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

или («на языке ε-δ», n°60): *для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что*

$$|x - x_0| < \delta \text{ влечет за собой } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке $\mathscr{X}$, т. е. непрерывна в каждой точке x_0 этого промежутка. Тогда для каждой точки x_0 из $\mathscr{X}$ в отдельности по заданному ε найдется δ, соответствующее ему в упомянутом выше смысле. При изменении x_0 в пределах $\mathscr{X}$, даже если ε неизменно, число δ, вообще говоря, будет меняться. Одного взгляда на черт. 30 достаточно, чтобы убедиться в том, что число δ, пригодное на участке, где функция изменяется медленно (график представляет пологую кривую), может оказаться слишком большим для участка быстрого изменения функции (где график круто поднимается или опускается). Иными словами, число δ вообще зависит не только от ε, но и от x_0.

Если бы речь шла о **конечном** числе значений x_0 (при неизменном ε), то из конечного числа соответствующих им чисел δ можно было бы выбрать наименьшее, и это последнее годилось бы, очевидно, и для всех рассматриваемых точек x_0 одновременно.

Но по отношению к бесконечному множеству значений x_0 содержащихся в промежутке $\mathcal{X}$, так уже рассуждать нельзя: им (при постоянном ε) соответствует бесконечное множество чисел δ, среди которых могут найтись и сколь угодно малые. Таким образом, по отношению к функции $f(x)$, непрерывной в промежутке $\mathcal{X}$, встает вопрос: существует ли, при заданном ε, такое δ, которое годилось бы для **всех** точек x_0 из этого промежутка?

Если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$|x - x_0| < \delta$$

влечет за собой

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

*где бы в пределах рассматриваемого промежутка $\mathcal{X}$ ни лежали точки x_0 и x, то функцию $f(x)$ называют **равномерно** непрерывной в промежутке $\mathcal{X}$.*

Черт. 30.

В этом случае число δ оказывается зависящим только от ε и может быть указано **до** выбора точки x_0: δ годится для всех x_0 одновременно.

Равномерная непрерывность означает, что во всех частях промежутка достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Можно показать на примере, что непрерывность функции во всех точках промежутка не влечет необходимо за собой ее **равномерной непрерывности** в этом промежутке. Пусть, например, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ для x, содержащихся между 0 и $\frac{2}{\pi}$, **исключая** 0. В этом случае область изменения x есть **незамкнутый** промежуток $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, и в каждой его точке функция непрерывна. Положим теперь $x_0 = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x = \frac{1}{n\pi}$, где n — любое натуральное число; тогда

$$f(x_0) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1, \quad f(x) = \sin n\pi = 0,$$

так что

$$|f(x)-f(x_0)|=1,$$

несмотря на то, что $|x-x_0|=\frac{1}{n(2n+1)\pi}$ с возрастанием n может быть сделано сколь угодно малым. Здесь при $\varepsilon=1$ нельзя найти δ, которое годилось бы одновременно для всех точек x_0 в $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, хотя для каждого отдельного значения x, ввиду непрерывности функции, такое δ существует!

75. Теорема о равномерной непрерывности. Весьма замечательно, что в замкнутом промежутке $[a, b]$ аналогичного положения вещей быть уже не может, как явствует из следующей теоремы.

Теорема Кантора *). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна в этом промежутке.*

Доказательство поведем от противного. Пусть для некоторого определенного числа $\varepsilon>0$ не существует такого числа $\delta>0$, о котором идет речь в определении равномерной непрерывности. В таком случае, какое бы число $\delta>0$ ни взять, найдутся в промежутке $[a, b]$ такие два значения x и x', что

$$|x-x'|<\delta, \textit{ и тем не менее } |f(x)-f(x')|\geqslant\varepsilon.$$

Возьмем теперь последовательность $\{\delta_n\}$ положительных чисел так, что $\delta_n\to 0$. В силу сказанного, для каждого δ_n найдутся в $[a, b]$ значения x_n и x'_n (они играют роль x и x') такие, что (при $n=1, 2, 3, \ldots$)

$$|x_n-x'_n|<\delta_n, \textit{ и тем не менее } |f(x_n)-f(x'_n)|\geqslant\varepsilon.$$

По лемме Больцано—Вейерштрасса [n°51], из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0 промежутка $[a, b]$. Для того чтобы не осложнять обозначений, будем считать, что уже сама последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0.

Так как $x_n-x'_n\to 0$ (ибо $|x_n-x'_n|<\delta_n$, а $\delta_n\to 0$), то одновременно и последовательность $\{x'_n\}$ сходится к x_0. Тогда, ввиду непрерывности функции в точке x_0, должно быть

$$f(x_n)\to f(x_0) \quad \text{и} \quad f(x'_n)\to f(x_0),$$

так что

$$f(x_n)-f(x'_n)\to 0,$$

*) Георг Кантор (1845—1918) — известный немецкий математик, основатель современной теории множеств.

а это противоречит тому, что при всех значениях n

$$|f(x_n)-f(x'_n)| \geqslant \varepsilon.$$

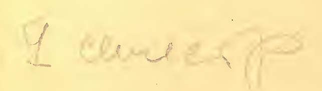
Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает такое следствие, которое ниже будет нам полезно:

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если промежуток произвольно разбить на частичные промежутки с длинами, меньшими δ, то в каждом из них колебание функции $f(x)$ будет меньше ε.*

Действительно, если, по заданному $\varepsilon > 0$, в качестве δ взять число, о котором говорится в определении равномерной непрерывности, то в частичном промежутке с длиной, меньшей δ, разность между любыми двумя значениями функции будет по абсолютной величине меньше ε. В частности, это справедливо и относительно наибольшего и наименьшего из этих значений, разность которых и дает колебание функции в упомянутом частичном промежутке [n°**73**].

Так, на протяжении полустолетия, одно за другим доказывались основные свойства непрерывных функций, начиная от более «очевидных» и кончая тонким свойством равномерной непрерывности, установленным в последней теореме. Еще раз подчеркнем, что надлежащую строгость эти доказательства получили лишь на основе развитых во второй половине прошлого века арифметических теорий вещественных чисел.



ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

76. Задача о вычислении скорости движущейся точки. Переходя к изложению основ дифференциального и интегрального исчисления, мы обращаем внимание читателя на то, что идеи этого исчисления зародились еще в XVII веке, т. е. задолго до тех тонких теорий, которые мы изучали в предшествующих главах. Лишь в заключительной главе этого тома мы будем иметь возможность коснуться важнейших моментов предистории математического анализа и охарактеризовать заслуги двух великих математиков Ньютона и Лейбница, завершивших работы своих предшественников созданием действительно нового исчисления. В нашем изложении мы будем руководствоваться уже современными требованиями к строгости, а не историей вопроса.

Впрочем, в качестве введения в дифференциальное исчисление, мы рассмотрим в настоящем номере задачу о скорости, а в ближайшем номере — задачу о касательной; обе задачи исторически оказались связанными с формированием основного понятия дифференциального исчисления, впоследствии получившего название п р о и з в о д н о й.

Начнем с частного примера, именно, рассмотрим свободное падение (в пустоте — чтобы не учитывать сопротивления воздуха) тяжелой материальной точки.

Если время t (сек.) отсчитывается от начала падения, то пройденный за это время путь s (*м*), по известной формуле, выразится так:

$$s = \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

где $g = 9{,}81$. Исходя отсюда, *требуется определить скорость v движения точки в данный момент t*, когда точка находится в положении M (черт. 31).

Черт. 31.

Придадим переменной t некоторое приращение Δt и рассмотрим момент $t + \Delta t$, когда точка будет в положении M_1. Приращение MM_1 пути за промежуток времени Δt обозначим через Δs.

Подставляя в (1) $t+\Delta t$ вместо t, получим для нового значения пути выражение

$$s+\Delta s=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2,$$

откуда

$$\Delta s=\frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t+\Delta t^2).$$

Разделив Δs на Δt, мы получим среднюю скорость падения точки на участке MM_1:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t.$$

Как видим, эта скорость меняется вместе с изменением Δt, тем лучше характеризуя состояние падающей точки в момент t, чем меньше промежуток Δt, протекший после этого момента.

Скоростью v точки в момент времени t называют предел, к которому стремится средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за промежуток Δt, когда Δt стремится к нулю.

В нашем случае, очевидно,

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\Delta t\right)=gt.$$

Аналогично вычисляется скорость v и в общем случае, скажем, прямолинейного движения точки. Положение точки определяется ее расстоянием s, отсчитываемым от некоторой начальной точки O; это расстояние и называется пройденным путем. Время t отсчитывается от некоторого начального момента, причем не обязательно, чтобы в этот момент точка находилась в O. Движение считается вполне заданным, когда известно уравнение движения: $s=f(t)$, из которого положение точки определяется для любого момента времени; в рассмотренном примере такую роль играло уравнение (1).

Для определения скорости v в данный момент t пришлось бы, как и выше, придать t приращение Δt; этому отвечает увеличение пути s на Δs. Отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

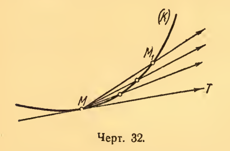
выразит среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ за промежуток Δt. Мгновенная же скорость v в момент t получится отсюда предельным переходом:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}v_{\text{ср}}=\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Как увидим, другая важная задача, которую мы рассмотрим ниже, приводит к подобной же предельной операции.

77. Задача о проведении касательной к кривой. Пусть дана кривая (K) (черт. 32) и на ней точка M; обратимся к установлению самого понятия касательной к кривой в ее точке M.

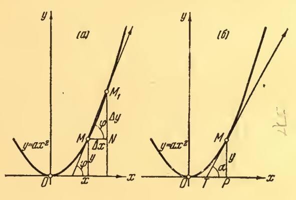
В школьном курсе касательную к окружности определяют как «прямую, имеющую с кривой лишь одну общую точку». Но это определение имеет частный характер, не вскрывая существа дела. Если попытаться применить его, например, к параболе $y = ax^2$ (черт. 33 *а*), то в начале координат O обе координатные оси подошли бы под это определение; между тем — как, вероятно, непосредственно ясно и читателю, — на деле лишь ось x служит касательной к параболе в точке O!



Черт. 32.

Мы дадим сейчас общее определение касательной. Возьмем на кривой (K) (черт. 32), кроме точки M, еще точку M_1 и проведем секущую MM_1. Когда точка M_1 вдоль по кривой будет перемещаться, эта секущая будет вращаться вокруг точки M.

Касательной к кривой (K) в точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1 вдоль



Черт. 33.

по кривой стремится к совпадению с M. Смысл этого определения состоит в том, что угол M_1MT стремится к нулю, лишь только к нулю стремится хорда MM_1.

Применим для примера это определение к параболе $y = ax^2$ в произвольной ее точке $M(x, y)$. Так как касательная проходит через эту точку, то для уточнения ее положения достаточно знать еще ее угловой

коэффициент. Мы и поставим себе задачей ***найти угловой коэффициент*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***касательной в точке*** M.

Придав абсциссе x приращение Δx, от точки M кривой перейдем к точке M_1 с абсциссой $x+\Delta x$ и ординатой

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2$$

(черт. 33 *а*). Угловой коэффициент $\operatorname{tg}\varphi$ секущей MM_1 определится из прямоугольного треугольника MNM_1. В нем катет MN равен приращению абсциссы Δx, а катет NM_1, очевидно, есть соответствующее приращение ординаты

$$\Delta y=a(2x\cdot\Delta x+\Delta x^2),$$

так что

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=2ax+a\Delta x.$$

Для получения углового коэффициента касательной, как легко понять, нужно перейти здесь к пределу при $\Delta x\to 0$, ибо это и равносильно тому, что хорда $MM_1\to 0$. При этом $\varphi\to\alpha$ и (по непрерывности функции $\operatorname{tg}\varphi$) $\operatorname{tg}\varphi\to\operatorname{tg}\alpha$.

Мы приходим таким образом к результату:

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}(2ax+a\,\Delta x)=2ax\,^{*)}.$$

В случае любой кривой с уравнением

$$y=f(x)$$

угловой коэффициент касательной устанавливается подобным же образом. Приращению Δx абсциссы отвечает приращение Δy ординаты, и отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

выражает угловой коэффициент секущей, $\operatorname{tg}\varphi$. Угловой же коэффициент касательной получается отсюда путем перехода к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

78. Определение производной. Сопоставляя операции, которые мы осуществляли при решении рассмотренных выше фундаментальных

---

*) Заметим попутно, что отсюда вытекает удобный прием для фактического построения касательной к параболе. Именно, из $\triangle MPT$ (черт. 33 *б*), отрезок

$$TP=\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{ax^2}{2ax}=\frac{x}{2},$$

так что T есть середина отрезка OP. Итак, для того чтобы получить касательную к параболе в ее точке M, достаточно разделить пополам отрезок OP и середину его соединить с точкой M.

задач, легко усмотреть, что в обоих случаях — если отвлечься от различия в истолковании переменных—по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной и затем вычислялся предел их отношения. Таким путем мы и приходим к основному понятию дифференциального исчисления — к понятию производной.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в промежутке $\mathscr{X}$. Исходя из некоторого значения $x=x_0$ независимой переменной, придадим ему приращение $\Delta x \gtrless 0$, не выводящее его из промежутка $\mathscr{X}$, так что и новое значение $x_0+\Delta x$ принадлежит этому промежутку. Тогда значение $y_0=f(x_0)$ функции заменится новым значением $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$, т. е. получит приращение

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx, при стремлении Δx к нулю, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

называется производной) функции $y=f(x)$ по независимой переменной x, при данном ее значении (или в данной точке) $x=x_0$.*

Таким образом, производная при данном значении $x=x_0$ — если существует—есть определенное число**); если же производная существует во всем промежутке $\mathscr{X}$, т. е. при каждом значении x в этом промежутке, то она является функцией от x.

Пользуясь только что введенным понятием, сказанное в n°**76** о скорости движущейся точки можно резюмировать так:

Скорость v есть производная от пройденного пути s по времени t.

Если слово «скорость» понимать в более общем смысле, то можно было бы производную всегда трактовать, как некую «скорость». Именно, имея функцию y от независимой переменной x, можно поставить вопрос о скорости изменения переменной y по сравнению с переменной x (при данном значении последней).

Если приращение Δx, приданное x, влечет за собой приращение Δy для y, то, по аналогии с n°**76**, средней скоростью изменения y по сравнению с x при изменении x на величину Δx можно считать отношение

$$V_{\text{ср}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

*) Термин «производная» был введен Лагранжем уже на рубеже XVIII и XIX веков.

**) Пока мы ограничиваемся случаем, когда упомянутый выше предел конечен [см. n°87].

Скоростью же изменения y при данном значении x естественно назвать предел этого отношения при стремлении Δx к нулю:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. как раз — производную от y по x.

В n°77 мы рассматривали кривую, заданную уравнением $y = f(x)$, и решили вопрос о проведении касательной к ней в заданной точке. Теперь мы можем сформулировать полученный нами результат так:

Угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ касательной есть производная от ординаты y по абсциссе x.

Это геометрическое истолкование производной часто бывает полезным.

Приведем в дополнение к рассмотренным выше еще несколько примеров, выявляющих роль понятия производной.

Если скорость движения v не постоянна и сама изменяется с течением времени: $v = f(t)$, то рассматривают «скорость изменения скорости», называя ее ускорением.

Именно, если приращению времени Δt отвечает приращение скорости Δv, то отношение

$$a_{ср} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

выразит среднее ускорение за промежуток времени Δt, а предел его даст ускорение движения в данный момент времени:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Таким образом, *ускорение есть производная от скорости по времени.*

Рассмотрим теперь «линейное» распределение массы непрерывным образом вдоль некоторого прямолинейного отрезка (т. е. собственно — вдоль стержня, шириной и толщиной которого мы пренебрегаем!). Пусть положение точки на этом отрезке определяется абсциссой x, отсчитываемой (например, в сантиметрах) от начала отрезка. Масса m, распределенная вдоль по отрезку $[0, x]$, будет зависеть от x: $m = f(x)$. Приращение Δx абсциссы конца отрезка вызовет приращение Δm массы: иными словами, Δm есть масса, связанная с отрезком $[x, x + \Delta x]$, примыкающим к точке x. Тогда средняя плотность распределения массы на указанном отрезке выразится отношением

$$\rho_{ср} = \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Предел этой средней плотности при стягивании отрезка в точку, т. е. при $\Delta x \to 0$:

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \rho_{ср} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

называется (линейной) плотностью в точке x: эта *плотность есть производная от массы по абсциссе.*

Обратимся к учению о теплоте и с помощью производной установим понятие теплоемкости тела при данной температуре.

Обозначим входящие в вопрос физические величины следующим образом: θ — температура (в градусах С), W — количество тепла, которое нужно сообщить телу при нагревании его от $0°$ до $\theta°$ (в калориях). Ясно, что W есть функция от θ: $W = f(\theta)$. Придадим θ некоторое приращение $\Delta\theta$, тогда W также получит приращение ΔW. Средняя теплоемкость при нагревании от $\theta°$ до $(\theta + \Delta\theta)°$ будет

$$c_{\text{ср}} = \frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

Но так как, вообще говоря, при изменении $\Delta\theta$ эта средняя теплоемкость меняется, мы не можем принять ее за теплоемкость при данной температуре θ. Для получения последней нужно перейти к пределу:

$$c = \lim_{\Delta\theta \to 0} c_{\text{ср}} = \lim \frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

Итак, можно сказать, что *теплоемкость тела есть производная от количества тепла по температуре.*

Все эти применения производной (число которых легко было бы увеличить) с достаточной яркостью обнаруживают тот факт, что производная существенным образом связана с основными понятиями из различных областей знания, способствуя самому установлению этих понятий.

Вычисление производных, изучение и использование их свойств и составляет главный предмет *дифференциального исчисления.*

Для обозначения производной употребляют различные символы:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{df(x_0)}{dx}\,^{*)} \quad \text{(Лейбниц);}$$

$$y' \quad \text{или} \quad f'(x_0) \quad \text{(Лагранж);}$$

$$Dy \quad \text{или} \quad Df(x_0) \quad \text{(Коши).}$$

Мы будем пользоваться преимущественно простыми обозначениями Лагранжа. Если применяют функциональное обозначение (см. второй столбец), то буква x_0 в скобках указывает то именно значение независимой переменной, при котором вычисляется производная. Наконец, заметим, что в случаях, когда может возникнуть сомнение относи-

---

*) Пока мы рассматриваем обозначения Лейбница как цельные символы; ниже мы увидим, что их можно рассматривать и как дроби. Мы не будем пользоваться обозначением Ньютона: $\dot{y}$, предполагающим, что роль независимой переменной играет время (см. по этому поводу n° 224).

тельно переменной, по которой взята производная (по сравнению с которой устанавливается «скорость изменения функции»), эта переменная указывается в виде значка внизу:

$$y'_x, \quad f'_x(x_0), \quad D_x y, \quad D_x f(x_0),$$

причем значок x не связан с тем частным значением x_0 независимой переменной, при котором вычисляется производная.

(В некотором смысле, можно сказать, что цельные символы

$$\frac{df}{dx}, \; f' \quad \text{или} \quad f'_x, \; Df \quad \text{или} \quad D_x f$$

играют роль функциональных обозначений для производной функции.)

Запишем теперь, пользуясь введенными для обозначения производных символами, некоторые из полученных выше результатов. Для скорости движения имеем

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{или} \quad v = s'_t,$$

а для ускорения

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{или} \quad a = v'_t.$$

Аналогично, угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ напишется так:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = y'_x$$

и т. п.

79. Примеры вычисления производных. В качестве примеров вычислим производные для ряда элементарных функций.

1°. Отметим, прежде всего, очевидные результаты: если $y = c =$ $= \text{const}$, то $\Delta y = 0$, каково бы ни было Δx, так что $y' = 0$; если же $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$ и $y' = 1$.

2°. Степенна́я функция: $y = x^\mu$ (где μ — любое вещественное число). Область изменения x зависит от μ; она была указана в п°22, 2°. Имеем (при $x \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Если воспользоваться пределом, вычисленным в п°65, 3), то получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1} \text{ *)}.$$

*) Если $\mu > 0$, то при $x = 0$ легко непосредственно получить значение производной: $y' = 0$.

В частности,

если $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, то $y'=(-1)\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$,

если $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, то $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3°. Показательная функция: $y=a^x$ $(a>0, \ -\infty<x<+\infty)$. Здесь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Воспользовавшись пределом, вычисленным в п°65, 2), найдем:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\ln a.$$

В частности,

если $y=e^x$, то $y'=e^x$.

Итак, скорость возрастания показательной функции (при $a>1$) пропорциональна значению самой функции: чем большего значения функция уже достигла, тем быстрее в этот момент она растет. Это дает точную характеристику роста показательной функции.

4°. Логарифмическая функция: $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1, \ 0<x<+\infty)$. В этом случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Воспользуемся пределом, вычисленным в п°65, 1:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a e}{x}.$$

В частности, для натурального логарифма получается исключительно простой результат:

при $y=\ln x$ имеем $y'=\frac{1}{x}$.

Это дает (хотя, по существу, и не новое) основание для предпочтения, которое оказывается натуральным логарифмам при теоретических исследованиях.

То обстоятельство, что скорость возрастания логарифмической функции (при $a>1$) обратно пропорциональна значению аргумента и, оставаясь положительной, стремится к нулю при безграничном возрастании аргумента, хорошо характеризует рост логарифмической функции.

5°. Тригонометрические функции. Пусть $y = \sin x$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Пользуясь непрерывностью функции $\cos x$ и известным [n°34, 5)] пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, получим

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x\,^{*)}.$$

Аналогично найдем:

$$\text{если} \quad y = \cos x, \quad \text{то} \quad y' = -\sin x.$$

В случае $y = \operatorname{tg} x$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x \cdot \cos x \cdot \cos(x+\Delta x)} = \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x+\Delta x)}.$$

Отсюда, как и выше,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Аналогично,

$$\text{если} \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad \text{то} \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

80. Производная обратной функции. Прежде чем заняться вычислением производных от обратных тригонометрических функций, докажем следующую общую теорему.

Теорема. *Пусть*: 1) *функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* n°**71** *о существовании обратной функции*, 2) *в точке $x = x_0$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной функции $x = g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$.*

---

*) Отметим, что эта формула обязана своей простотой тому, что угол измеряется в радианах. Если бы мы стали измерять x, например, в градусах, предел отношения синуса к углу был бы равен не единице, а, как легко видеть, $\frac{\pi}{180}$, и тогда мы имели бы

$$(\sin x)' = \frac{\pi}{180}\cos x.$$

Доказательство. Придадим значению $y=y_0$ произвольное приращение Δy, тогда соответственное приращение Δx получит и функция $x=g(y)$. Заметим, что при $\Delta y \neq 0$, ввиду однозначности самой функции $y=f(x)$, и $\Delta x \neq 0$. Имеем

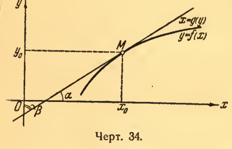
$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь $\Delta y \to 0$ по любому закону, то — в силу непрерывности функции $x=g(y)$ — и приращение $\Delta x \to 0$. Но тогда знаменатель правой части написанного равенства стремится к пределу $f'(x_0)\neq 0$, следовательно, существует предел для левой части, равный обратной величине $\frac{1}{f'(x_0)}$; он и представляет собой производную $g'(y_0)$.

Итак, имеем простую формулу:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Легко выяснить ее геометрический смысл. Мы знаем, что прозводная y'_x есть тангенс угла α, образованного касательной к графику функции $y=f(x)$ с осью x. Но обратная функция $x=g(y)$ имеет тот же график, лишь независимая переменная для нее откладывается по оси y. Поэтому производная x'_y равна тангенсу угла β, составленного той же касательной с осью y (черт. 34). Таким образом, выведенная формула сводится к известному соотношению



Черт. 34.

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

связывающему тангенсы двух углов α и β, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$.

Положим для примера $y=a^x$. Обратной для нее функцией будет $x=\log_a y$. Так как (см. 3°) $y'_x=a^x\cdot\ln a$, то по нашей формуле

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{a^x\cdot\ln a}=\frac{\log_a e}{y},$$

в согласии с 4°.

Переходя теперь к вычислению производных от обратных тригонометрических функций, мы для удобства поменяем ролями переменные x и y, переписав доказанную формулу в виде

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}.$$

6°. Обратные тригонометрические функции. Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$ $(-1<x<1)$, причем $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Она является обратной для функции $x=\sin y$, имеющей для указанных значений y положительную производную $x'_y=\cos y$. В таком случае существует также производная y'_x, равная, по нашей формуле,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

корень мы берем со знаком плюс, так как $\cos y>0$.

Мы исключаем значения $x=\pm 1$, ибо для соответствующих значений $y=\pm\frac{\pi}{2}$ производная $x'_y=\cos y=0$.

Функция $y=\operatorname{arctg} x$ $(-\infty<x<+\infty)$ служит обратной для функции $x=\operatorname{tg} y$. По нашей формуле

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогично можно получить:

для $y=\arccos x$

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(-1<x<1),$$

для $y=\operatorname{arcctg} x$

$$y'=-\frac{1}{1+x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

81. Сводка формул для производных. Сделаем сводку всех выведенных нами формул:

1. $y=c$	$y'=0$
2. $y=x$	$y'=1$
3. $y=x^{\mu}$	$y'=\mu x^{\mu-1}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
5. $y=\log_a x$	$y'=\frac{\log_a e}{x}$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
6. $y=\sin x$	$y'=\cos x$
7. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$
8. $y=\operatorname{tg} x$	$y'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

9. $y = \operatorname{ctg} x$ $\qquad y' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10. $y = \arcsin x$ $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

82. Формула для приращения функции. Докажем здесь два простых утверждения, имеющих приложения в дальнейшем.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $\mathcal{X}$. Исходя из определенного значения $x = x_0$ в этом промежутке, обозначим через $\Delta x \gtrless 0$ произвольное приращение x, подчиненное лишь тому ограничению, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ не вышла за пределы $\mathcal{X}$. Тогда соответствующим приращением функции будет

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1°. *Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет (конечную) производную $y'_x = f'(x_0)$, то приращение функции может быть представлено в виде*

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \tag{2}$$

или, короче,

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{2a}$$

где α есть величина, зависящая от Δx и вместе с ним стремящаяся к нулю.

Так как, по самому определению производной, при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'_x,$$

то, полагая

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x,$$

видим, что и $\alpha \to 0$. Определяя отсюда Δy, придем к формуле (2a).

Так как величина $\alpha \cdot \Delta x$ (при $\Delta x \to 0$) будет бесконечно малой высшего порядка, чем Δx, то, употребляя введенное в n°54 обозначение, можно наши формулы переписать в виде

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \tag{3}$$

или

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{3a}$$

Замечание. До сих пор мы считали $\Delta x \gtrless 0$; величина α и не была определена при $\Delta x = 0$. Когда мы говорили, что $\alpha \to 0$ при

$\Delta x \to 0$, то (как обычно) предполагали, что Δx стремится к нулю по любому закону, но не принимая нулевого значения. Положим теперь $\alpha = 0$ при $\Delta x = 0$; тогда разумеется, формула (2) сохранится и при $\Delta x = 0$. Кроме того, соотношение

$$\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$$

можно понимать и в более широком смысле, чем раньше, не исключая для Δx возможности стремиться к нулю, принимая в числе прочих и нулевые значения.

Из доказанных формул непосредственно вытекает:

2°. *Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет (конечную) производную, то в этой точке функция необходимо непрерывна.*

Действительно, из (2а) ясно, что соотношение $\Delta x \to 0$ влечет за собою $\Delta y \to 0$.

83. Простейшие правила вычисления производных. В предыдущих номерах мы вычислили производные для элементарных функций. Здесь и в следующем номере мы установим ряд простых правил, с помощью которых станет возможным вычисление производной для любой функции, составленной из элементарных при посредстве конечного числа арифметических действий и суперпозиций [n° **25**].

I. *Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет (в определенной точке x) производную u'. Докажем, что и функция $y = cu$ ($c = \text{const}$) также имеет производную (в той же точке), и вычислим ее.*

Если независимая переменная x получит приращение Δx, то функция u получит приращение Δu, перейдя от исходного значения u к значению $u + \Delta u$. Новое значение функции y будет $y + \Delta y = c(u + \Delta u)$. Отсюда $\Delta y = c \cdot \Delta u$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'.$$

Итак, производная существует и равна

$$y' = (c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

Эта формула выражает такое правило: постоянный множитель может быть вынесен за знак производной.

II. *Пусть функции $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ имеют (в определенной точке) производные u', v'. Докажем, что функция $y = u \pm v$ также имеет производную (в той же точке), и вычислим ее.*

Придадим x приращение Δx; тогда u, v и y получат, соответственно, приращения Δu, Δv и Δy. Их новые значения $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $y + \Delta y$ связаны тем же соотношением:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v).$$

Отсюда

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

так что производная y' существует и равна

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Этот результат легко может быть распространен на любое число слагаемых (и притом — тем же методом).

III. *При тех же предположениях относительно функций u, v докажем, что функция $y = u \cdot v$ также имеет производную, и найдем ее.*

Приращению Δx отвечают, как и выше, приращения Δu, Δv и Δy; при этом $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$, так что

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Так как при $\Delta x \to 0$, в силу n° 82, 2°, и $\Delta v \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v',$$

т. е. существует производная y' и равна

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Если $y = uvw$, причем u', v', w' существуют, то

$$y' = [(uv) \cdot w]' = (uv)' \cdot w + (uv) \cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Легко сообразить, что для случая n сомножителей будем иметь аналогично:

$$[\overbrace{uvw \ldots s}^{n}]' = u'vw \ldots s + uv'w \ldots s + uvw' \ldots s + \ldots + uvw \ldots s'.$$

Для того чтобы доказать это, можно воспользоваться методом математической индукции.

IV. *Наконец, если u, v удовлетворяют прежним предположениям и, кроме того, v отлично от нуля, то мы докажем, что функция $y = \frac{u}{v}$ также имеет производную, и найдем ее.*

При тех же обозначениях, что и выше, имеем

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

так что

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Устремляя здесь Δx к нулю (причем одновременно и $\Delta v \to 0$), убеждаемся в существовании производной

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

84. Производная сложной функции. Теперь мы можем установить весьма важное при практическом нахождении производных правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих функций.

V. *Пусть*: 1) *функция* $u = \varphi(x)$ *имеет в некоторой точке* x_0 *производную* $u'_x = \varphi'(x_0)$, 2) *функция* $y = f(u)$ *имеет в соответствующей точке* $u_0 = \varphi(x_0)$ *производную* $y'_u = f'(u)$. *Тогда сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *в упомянутой точке* x_0 *также будет иметь производную, равную произведению производных функций* $f(u)$ *и* $\varphi(x)$:

$$[f(\varphi(x))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)\,^{*)}$$

или, короче,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Для доказательства придадим x произвольное приращение Δx; пусть Δu — соответствующее приращение функции $u = \varphi(x)$ и, наконец, Δy — приращение функции $y = f(u)$, вызванное приращением Δu. Воспользуемся соотношением (2а), которое, заменяя x на u, перепишем в виде

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α зависит от Δu и вместе с ним стремится к нулю). Разделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Если Δx устремить к нулю, то будет стремиться к нулю и Δu [82, 2°], а тогда, как мы знаем, будет также стремиться к нулю зависящая от Δu величина α. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x,$$

который и представляет собою искомую производную y'_x.

Замечание. Здесь сказывается полезность замечания в n° 82 относительно величины α при $\Delta x = 0$: покуда Δx есть приращение *независимой переменной*, мы могли предполагать его

---

*) Подчеркнем, что символ $f'_u(\varphi(x_0))$ означает производную функции $f(u)$ *по ее аргументу* u (а не по x), вычисленную при значении $u_0 = \varphi(x_0)$ этого аргумента.

отличным от нуля, но когда Δx заменено приращением функции $u=\varphi(x)$, то даже при $\Delta x \neq 0$ мы уже не вправе считать, что $\Delta u \neq 0$.

85. Примеры *). Сначала приведем несколько примеров приложения правил I—IV.

1) Рассмотрим многочлен:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

По правилу II, а затем I, будем иметь:

$$y' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \ldots + (a_{n-2}x^2)' + (a_{n-1}x)' + (a_n)' =$$
$$= a_0(x^n)' + a_1(x^{n-1})' + \ldots + a_{n-2}(x^2)' + a_{n-1}(x)' + (a_n)'.$$

Использовав же формулы 1, 2, 3 [n° 81], окончательно получим

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

2) $y = (2x^2 - 5x + 1)\cdot e^x$.
По правилу III

$$y' = (2x^2 - 5x + 1)'\cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1)\cdot (e^x)'.$$

Опираясь на предыдущий пример и формулу 4 [n° 81], найдем

$$y' = (4x - 5)\cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1)\cdot e^x = (2x^2 - x - 4)e^x.$$

3) $y = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$.

Здесь приходится пользоваться сначала правилом IV, а затем правилами II и III (и формулами 6, 7, n° 81):

$$y' = \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2} =$$
$$= \frac{x\cos x(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2} =$$
$$= \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

Вычисление производных числителя и знаменателя мы произвели, не расчленяя его на отдельные шаги. Путем упражнения необходимо добиться того, чтобы вообще писать производные сразу.

Примеры на вычисление производных сложных функций:

4) Пусть $y = \ln\sin x$, иначе говоря, $y = \ln u$, где $u = \sin x$. По правилу V, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Производная $y'_u = (\ln u)'_u = \dfrac{1}{u}$ (формула 5) должна быть взята при $u = \sin x$. Таким образом,

$$y'_x = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \quad \text{(формула 6)}.$$

5) $y = e^{x^2}$, т. е. $y = e^u$, где $u = x^2$;

$$y'_x = e^{x^2}\cdot(x^2)' = 2x\cdot e^{x^2} \qquad \text{(V; 4 и 3)}.$$

---

*) Буквами x, y, u, v ниже обозначены переменные, а другими буквами — постоянные величины.

Конечно, в отдельном выписывании составляющих функций на деле нет надобности.

6) $y = \sin ax;\quad y'_x = \cos ax \cdot (ax)' = a \cdot \cos ax$ (V; 7, I, 2).

7) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x};\quad y'_x = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= -\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{(V; 12, 3).}$$

Случай сложной функции, полученной в результате нескольких суперпозиций, исчерпывается последовательным применением правила V:

8) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}$;

тогда

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)'_x = \qquad \text{(V; 3)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}} \cdot \sec^2 \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)'_x = \qquad \text{(V; 8)}$$

$$= \frac{\sec^2 \frac{1}{2}x}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}}.$$

Дадим еще несколько примеров на применение всех правил:

9) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+c});\quad y'_x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}} \cdot (x+\sqrt{x^2+c})'_x =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+c}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}.$$

10) $y = \frac{x}{c\sqrt{x^2+c}};\quad y' = \frac{1}{c} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+c} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+c}}}{(\sqrt{x^2+c})^2} =$

$$= \frac{1}{(x^2+c)^{3/2}}.$$

11) В виде упражнения исследуем еще вопрос о производной степенно-показательного выражения $y = u^v$ $(u > 0)$, где u и v суть функции от x, имеющие в данной точке производные u', v'.

Прологарифмировав равенство $y = u^v$, получим

$$\ln y = v \cdot \ln u. \qquad (4)$$

Таким образом, выражение для y можно переписать в виде $y = e^{v \cdot \ln u}$, откуда уже ясно, что производная y' существует. Самое же вычисление ее проще осуществить, приравнивая производные по x от обеих частей

равенства (4). При этом мы используем правила V и III (помня о том, что u, v и y суть функции от x). Мы получим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',$$

откуда

$$y' = y\left(\frac{vu'}{u} + v'\ln u\right)$$

или, подставляя вместо y его выражение,

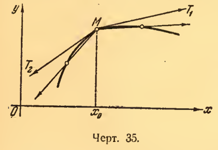
$$y' = u^v\left(\frac{vu'}{u} + v'\ln u\right). \qquad (5)$$

Эта формула впервые была установлена Лейбницем и И. Бернулли.

Например,

$$\text{если}\quad y = x^{\sin x},\ \text{то}\ y'_x = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\cdot\ln x\right).$$

86. Односторонние производные. Обратимся в заключение к обзору ряда особых случаев, которые могут представиться в отношении производных. Начнем с установления понятия об односторонних производных. Если рассматриваемое значение x является одним из концов того промежутка $\mathscr{X}$, в котором определена функция $y=f(x)$, то при вычислении предела $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приходится ограничиться приближением Δx к нулю лишь справа (когда речь идет о левом конце промежутка) или слева (для правого конца). В этом случае говорят об односторонней производной, справа или слева. В соответствующих точках график функции имеет одностороннюю касательную.



Черт. 35.

Может случиться, что и для внутренней точки x существуют лишь односторонние пределы отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (при $\Delta x\to+0$ или $\Delta x\to-0$), не равные между собой; их также называют односторонними производными. Для графика функции в соответствующей точке будут существовать лишь односторонние касательные, составляющие угол: точка будет угловой (черт. 35).

В качестве примера рассмотрим функцию $y=f(x)=|x|$. Исходя из значения $x=0$, будем иметь

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

Если $\Delta x > 0$, то

$$\Delta y = \Delta x,\quad \lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Если же $\Delta x < 0$, то

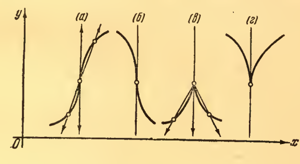
$$\Delta y = -\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Начало координат является угловой точкой для графика этой функции, состоящей из биссектрис первого и второго координатных углов.

87. Бесконечные производные. Если отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, то это несобственное число также называют производной и обозначают как обычно.

Геометрическое истолкование производной как углового коэффициента касательной распространяется и на этот случай; но здесь — касательная оказывается параллельной оси y (черт. 36 *а*, *б*).

Аналогично устанавливается понятие об односторонней бесконечной производной. Впрочем, на этот раз даже наличие различных по знаку односторонних бесконечных производных (черт. 36 *в*, *г*)



Черт. 36.

тоже влечет за собой существование единственной вертикальной касательной. Особенностью этого случая является наличие острия, направленного вверх или вниз.

Пусть, например, $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$; при $x \neq 0$ формула 3 п°81 дает

$$f_1'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

но она не приложима при $x = 0$. В этой точке вычислим производную, исходя непосредственно из ее определения; составив отношение

$$\frac{f_1(0 + \Delta x) - f_1(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}},$$

видим, что его пределом при $\Delta x \to 0$ будет $+\infty$. Аналогично убеждаемся, что для функции $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ при $x = 0$ производная слева равна $-\infty$, а справа $+\infty$.

Пользуясь расширением понятия производной, можно было бы дополнить теорему n° 80 о производной обратной функции указанием, что и в тех случаях, когда $f'(x_0)$ равна нулю или $\pm\infty$, производная обратной функции $g'(y_0)$ существует и равна, соответственно, $\pm\infty$ или нулю. Например, так как функция $\sin x$ при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ имеет производную $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то для обратной функции $\arcsin y$ при $y = \pm 1$ существует бесконечная производная (именно, $+\infty$).

88. Дальнейшие примеры особых случаев. 1°. *Пример несуществования производной.* Уже функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ [см. n° 86] не имеет обычной, двусторонней, производной. Но интереснее пример функции

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (\text{при } x \neq 0),\ f(0) = 0,$$

непрерывной и при $x = 0$ [n° 67, 4)], но не имеющей в этой точке даже односторонних производных. Действительно, отношение

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$$

не стремится ни к какому пределу при $\Delta x \to \pm 0$.

По графику этой функции (черт. 21) легко усмотреть, что секущая OM_1, исходящая из начальной точки O, не имеет предельного положения при стремлении M_1 к O, так что касательной к кривой в начальной точке нет (даже односторонней).

Впоследствии мы познакомимся с замечательным примером функции, непрерывной при всех значениях аргумента, но ни при одном из них не имеющей производной.

2°. *Пример разрыва производной.* Если для данной функции $y = f(x)$ существует конечная производная $y' = f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка $\mathscr{X}$, то эта производная, в свою очередь, представляет собой в $\mathscr{X}$ функцию от x. В многочисленных примерах, которые нам до сих пор встречались, эта функция сама оказывалась непрерывной. Однако это может быть не так. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad (\text{при } x \neq 0),\ f(0) = 0.$$

Если $x \neq 0$, то ее производная вычисляется обычными методами:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

но полученный результат неприложим при $x = 0$. Обращаясь в этом случае непосредственно к самому определению понятия производной, будем иметь

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Вместе с тем ясно, что $f'(x)$ при $x \to 0$ не стремится ни к какому пределу, так что при $x=0$ функция $f'(x)$ имеет разрыв.

В этом примере разрыв производной оказывается второго рода. Это — не случайность: ниже мы увидим, что разрывов первого рода, т. е. скачков, производная иметь не может [n° **103**].

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

89. Определение дифференциала. Пусть имеем функцию $y=f(x)$, определенную в некотором промежутке $\mathscr{X}$ и непрерывную в рассматриваемой точке x_0. Тогда приращению Δx аргумента отвечает приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

бесконечно малое вместе с Δx. Большую важность имеет вопрос, *существует ли для Δy такая линейная относительно Δx бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ ($A=\text{const}$), что их разность оказывается, по сравнению с Δx, бесконечно малой высшего порядка*:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

При $A \neq 0$ наличие равенства (1) показывает, что бесконечно малая $A \cdot \Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy и, значит, служит для последней ее главной частью, если за основную бесконечно малую взята Δx [n°n° **56, 57**].

Если равенство (1) *выполняется, то функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой (при данном значении $x=x_0$), само же выражение $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции* и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

[В последнем случае в скобках указывается исходное значение x*)].

Еще раз повторяем, что дифференциал функции характеризуется двумя свойствами: (а) он представляет линейную однородную функцию от приращения Δx аргумента и (б) разнится от приращения функции на величину, которая при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой, порядка высшего чем Δx.

Рассмотрим примеры.

1) Площадь Q круга радиуса r задается формулой $Q=\pi r^2$. Если радиус r увеличить на Δr, то соответствующее приращение ΔQ величины Q будет площадью кругового кольца, содержащегося между концентрическими окружностями радиуса r и $r+\Delta r$. Из выражения

$$\Delta Q = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

сразу усматриваем, что главной частью ΔQ при $\Delta r \to 0$ будет $2\pi r \cdot \Delta r$; это и есть дифференциал, dQ. Геометрически он выражает площадь прямоугольника (полученного как бы «выпрямлением» кольца) с основанием, равным длине окружности $2\pi r$, и высотой Δr.

---

*) Здесь df как единый символ играет роль функционального обозначения.

2) Рассмотрим свободное падение материальной точки по закону $s=\frac{gt^2}{2}$. За промежуток времени Δt, от t до $t+\Delta t$, движущаяся точка пройдет путь

$$\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\cdot\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

При $\Delta t\to 0$ его главной частью будет $ds=gt\cdot\Delta t$. Вспомнив, что скорость в момент t будет $v=gt$ [n° 76], видим, что дифференциал пути (приближенно заменяющий приращение пути) вычисляется как путь, пройденный точкой, которая в течение всего промежутка времени Δt двигалась бы именно с этой скоростью.

90. Связь между дифференцируемостью и существованием производной. Легко установить теперь справедливость следующего утверждения:

Для того чтобы функция $y=f(x)$ *в точке* x_0 *была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для нее в этой точке существовала конечная производная* $y'=f'(x_0)$. *При выполнении этого условия равенство* (1) *имеет место при значении постоянной* A, *равном именно этой производной*:

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+o(\Delta x). \tag{1a}$$

Необходимость. Если выполняется (1), то отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

так что, устремляя Δx к нулю, действительно, получаем

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x.$$

Достаточность сразу вытекает из n° 82, 1° [см. там (3a)]. Итак, *дифференциал функции* $y=f(x)$ *всегда равен*

$$dy=y'_x\cdot\Delta x\ ^{*)}. \tag{2}$$

Подчеркнем здесь же, что под Δx в этом выражении мы разумеем произвольное приращение независимой переменной, т. е. произвольное число (которое часто удобно бывает считать не зависящим от x). При этом вовсе не обязательно предполагать Δx бесконечно малой; но если $\Delta x\to 0$, то дифференциал dy также будет бесконечно малой, и именно (при $y'_x\neq 0$) — главной частью бесконечно малого приращения функции Δy. Это и дает основание приближенно полагать

$$\Delta y\doteq dy \tag{3}$$

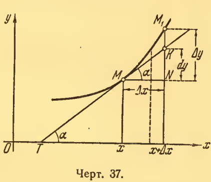
*) Легко проверить, что именно так и составлялся дифференциал в примерах, рассмотренных в предыдущем номере. Например, в случае 1), имеем:

$$Q=\pi r^2,\quad Q'_r=2\pi r,\quad dQ=2\pi r\cdot\Delta r.$$

с тем большей точностью, чем меньше Δx. Мы вернемся к рассмотрению приближенного равенства (3) в n°**93**.

Чтобы истолковать геометрически дифференциал dy и его связь с приращением Δy функции $y = f(x)$, рассмотрим график этой функции (черт. 37). Значением x аргумента и y функции определится точка M на кривой. Проведем в этой точке кривой касательную MT; как мы уже видели в n°78, ее угловой коэффициент, $\operatorname{tg}\alpha$, равен производной y'_x. Если абсциссе x придать приращение Δx, то ордината кривой y получит приращение $\Delta y = NM_1$. В то же время ордината касательной получит приращение NK. Вычисляя NK как катет прямоугольного треугольника MNK, найдем:

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$



Черт. 37.

Итак, в то время как Δy есть приращение ординаты кривой, dy является соответственным приращением ординаты касательной.

В заключение остановимся на самой независимой переменной x: ее дифференциалом называют именно приращение Δx, т. е. условно полагают

$$dx = \Delta x. \tag{4}$$

Если отождествить дифференциал независимой переменной x с дифференциалом функции $y = x$ (в этом — тоже своего рода соглашение!), то формулу (4) можно и доказать, ссылаясь на (2): $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Учитывая соглашение (4), можно теперь переписать формулу (2), дающую определение дифференциала, в виде

$$dy = y'_x \cdot dx; \tag{5}$$

так ее обычно и пишут.

Отсюда получается

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

так что выражение, которое мы раньше рассматривали как цельный символ, теперь можно трактовать как дробь. То обстоятельство, что слева здесь стоит вполне определенное число, в то время как справа мы имеем отношение двух неопределенных чисел dy и dx (ведь $dx = \Delta x$ произвольно), не должно смущать читателя: числа dx и dy изменяются пропорционально, причем производная y'_x как раз является коэффициентом пропорциональности.

Понятие дифференциала и самый термин «дифференциал» *) принадлежат Лейбницу, который, однако, точного определения этого понятия не дал. Наряду с дифференциалами, Лейбниц рассматривал и дифференциальные частные, т. е. частные двух дифференциалов, что равносильно нашим производным; однако именно дифференциал был для Лейбница первоначальным понятием. Со времен Коши, который своей теорией пределов создал фундамент для всего анализа и впервые отчетливо определил производную как предел, стало обычным отправляться именно от производной, а понятие дифференциала строить уже на основе производной.

91. Основные формулы и правила дифференцирования. Вычисление дифференциалов функций носит название дифференцирования **). Так как дифференциал dy лишь множителем dx отличается от производной y'_x, то по таблице производных для элементарных функций [81] легко составить таблицу дифференциалов для них:

1. $y = c$ $\qquad dy = 0$
2. $y = x^{\mu}$ $\qquad dy = \mu x^{\mu-1}\,dx$
   $y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad dy = -\dfrac{dx}{x^2}$
   $y = \sqrt{x}$ $\qquad dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $y = a^x$ $\qquad dy = a^x \ln a\,dx$
   $y = e^x$ $\qquad dy = e^x\,dx$
4. $y = \log_a x$ $\qquad dy = \dfrac{\log_a e}{x}\,dx$
   $y = \ln x$ $\qquad dy = \dfrac{dx}{x}$
5. $y = \sin x$ $\qquad dy = \cos x\,dx$
6. $y = \cos x$ $\qquad dy = -\sin x\,dx$
7. $y = \operatorname{tg} x$ $\qquad dy = \sec^2 x\,dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
8. $y = \operatorname{ctg} x$ $\qquad dy = -\csc^2 x\,dx = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
9. $y = \arcsin x$ $\qquad dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \arccos x$ $\qquad dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$
12. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

*) От латинского слова differentia, означающего «разность».

**) Впрочем, тем же термином обычно обозначают и вычисление производных, для которого на русском языке нет особого термина.

Правила дифференцирования *) выглядят так:

I. $d(cu) = c \cdot du$,

II. $d(u \pm v) = du \pm dv$,

III. $d(uv) = v\,du + u\,dv$,

IV. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Все они легко получаются из соответствующих правил для производных. Докажем, например, два последних:

$$d(u\,v) = (u\,v)' \cdot dx = (u'\,v + u\,v') \cdot dx =$$
$$= v\,(u' \cdot dx) + u\,(v' \cdot dx) = v\,du + u\,dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot dx =$$
$$= \frac{v\,(u' \cdot dx) - u\,(v' \cdot dx)}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

92. Инвариантность формы дифференциала. Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному замечательному и важному свойству дифференциала.

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t, то — по правилу V [n°84] — существует и производная

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \tag{7}$$

Дифференциал dy, если x считать независимой переменной, выразится по формуле (5). Перейдем теперь к независимой переменной t; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

Заменяя, однако, производную y'_t ее выражением (7) и замечая, что $x'_t \cdot dt$ есть дифференциал x как функции от t, окончательно получим

$$dy = y'_x \cdot x'_t\,dt = y'_x\,dx,$$

т. е. вернемся к прежней форме дифференциала!

Таким образом, мы видим, что *форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.* Мы всегда имеем право писать дифференциал y в форме (5), будет ли x независимой переменной или нет; разница лишь в том, что, если за независимую переменную выбрано t, то dx овначает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t. Это свойство и называют инвариантностью формы дифференциала.

---

*) Если речь идет именно о вычислении дифференциалов.

Так как из формулы (5) непосредственно получается формула (6), выражающая производную y'_x через дифференциалы dx и dy, то и последняя формула сохраняет силу, по какой бы независимой переменной (конечно, одной и той же в каждом случае) ни были вычислены названные дифференциалы.

Пусть, например, $y = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$, так что

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Положим теперь $x = \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $y = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, и мы будем иметь: $dx = \cos t \cdot dt$, $dy = -\sin t \cdot dt$. Легко проверить, что формула (6) дает лишь другое выражение для вычисленной выше производной.

Замечание. Возможность выражать производную через дифференциалы, взятые по любой переменной, в частности, приводит к тому, что формулы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

выражающие в лейбницевых обозначениях правила дифференцирования обратной функции и сложной функции, становятся простыми алгебраическими тождествами (поскольку все дифференциалы здесь могут быть взяты по одной и той же переменной). Не следует думать, впрочем, что этим дан новый вывод названных формул: прежде всего, здесь не доказывалось существование производных слева, главное же — мы существенно пользовались инвариантностью формы дифференциала, которая сама есть следствие правила V.

93. Дифференциалы как источник приближенных формул. Мы видели, что при $\Delta x \to 0$ дифференциал dy функции y (если только $y'_x \neq 0$) представляет собой главную часть бесконечно малого приращения функции Δy. Таким образом, $\Delta y \sim dy$, так что

$$\Delta y \doteq dy, \tag{3}$$

или, подробнее,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{3a}$$

с точностью до бесконечно малой высшего порядка чем Δx. Это значит [n°56], что относительная погрешность этого равенства становится сколь угодно малой при достаточно малом Δx.

Это обстоятельство может быть и непосредственно усмотрено из черт. 37, дающего геометрическое истолкование дифференциала. На графике видно, что при уменьшении Δx мы, действительно, все с бо́льшей относительной точностью можем заменять приращение ординаты кривой приращением ординаты касательной.

Выгода замены приращения функции Δy ее дифференциалом dy состоит, как ясно читателю, в том, что dy зависит от Δx линейно, в то время как Δy представляет собою обыкновенно более сложную функцию от Δx.

Если положить $\Delta x = x - x_0$ и $x_0 + \Delta x = x$, то равенство (3а) примет вид

$$f(x) - f(x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

По этой формуле, для значений x, близких к x_0, функция $f(x)$ приближенно заменяется линейной функцией. Геометрически это соответствует замене участка кривой $y = f(x)$, примыкающего к точке $(x_0, f(x_0))$, отрезком касательной к кривой в этой точке:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ ^{*})$$

(ср. черт. 37). Взяв для простоты $x_0 = 0$ и ограничиваясь малыми значениями x, будем иметь приближенную формулу:

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0) \cdot x.$$

Отсюда, подставляя вместо $f(x)$ различные элементарные функции, легко получить ряд формул:

$$(1 + x)^{\mu} \doteq 1 + \mu x, \text{ в частности, } \sqrt{1 + x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$e^x \doteq 1 + x, \quad \ln(1 + x) \doteq x, \quad \sin x \doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x \text{ и т. п.},$$

из которых многие нам уже известны.

94. Применение дифференциалов при оценке погрешностей. Особенно удобно и естественно использовать понятие дифференциала в приближенных вычислениях при оценке погрешностей. Пусть, например, величину x мы измеряем или вычисляем непосредственно, а зависящую от нее величину y определяем по формуле $y = f(x)$. При измерении величины x обыкновенно вкрадывается погрешность Δx, которая влечет за собою погрешность Δy для величины y. Ввиду малой величины этих погрешностей, полагают

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

т. е. заменяют приращение дифференциалом. Пусть δx будет максимальной абсолютной погрешностью величины x: $|\Delta x| \leqslant \delta x$ (в обычных условиях подобная граница погрешности при измерении известна). Тогда, очевидно, за максимальную абсолютную погрешность (границу погрешности) для y можно принять

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x. \tag{8}$$

1) Пусть, например, для определения объема шара сначала (с помощью штангенциркуля, толщемера, микрометра и т. п.) непосредственно измеряют диаметр D шара, а затем объем V вычисляют по формуле

$$V = \frac{\pi}{6} D^3.$$

Так как $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$, то в этом случае, в силу (8),

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D.$$

---

*) Действительно, уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку (x_0, y_0), будет

$$y = y_0 + k(x - x_0);$$

в случае касательной здесь следует положить $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$.

Разделив это равенство на предыдущее, получим

$$\frac{\delta V}{V} = 3\frac{\delta D}{D},$$

так что (максимальная) относительная погрешность вычисленного значения объема оказывается втрое бо́льшей, чем (максимальная) относительная погрешность измеренного значения диаметра.

2) Если число x, для которого вычисляется его десятичный логарифм $y = \log x$, получено с некоторой погрешностью, то это отразится на логарифме, создавая и в нем погрешность.

Здесь $y'_x = \frac{M}{x}$ ($M \doteq 0{,}4343$), так что, по формуле (8),

$$\delta y = 0{,}4343\frac{\delta x}{x}.$$

Таким образом, (максимальная) абсолютная погрешность логарифма просто определяется по (максимальной) относительной погрешности самого числа, и обратно.

Этот результат имеет многообразные применения. Например, с его помощью можно составить себе представление о точности обыкновенной логарифмической линейки со шкалой в 25 *см* $= 250$ *мм*. При отсчете или установке визира можно ошибиться, примерно, на $0{,}1$ *мм* в ту или другую сторону, что отвечает погрешности в логарифме

$$\delta y = \frac{0{,}1}{250} = 0{,}0004.$$

Отсюда, по нашей формуле,

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{0{,}0004}{0{,}4343} \doteq 0{,}001.$$

Относительная точность отсчетов во всех частях шкалы одна и та же!

§ 3. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

95. Определение производных высших порядков. Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y' = f'(x)$ в некотором промежутке $\mathscr{X}$, так что эта последняя сама представляет новую функцию от x, то может случиться, что эта функция в некоторой точке x_0 из $\mathscr{X}$, в свою очередь, имеет производную, конечную или нет. Ее называют производной второго порядка, или второй производной функции $y = f(x)$ в упомянутой точке, и обозначают одним из символов

$$\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'',\quad D^2y;\quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\quad f''(x_0),\quad D^2f(x_0).$$

Так, например, мы видели в n°78, что скорость v движения точки равна производной от пройденного точкой пути s по времени t: $v = \frac{ds}{dt}$, ускорение же a есть производная от скорости v по времени:

$a=\frac{dv}{dt}$. Значит, ускорение является **второй производной** от пути по времени: $a=\frac{d^2s}{dt^2}$.

Аналогично, если функция $y=f(x)$ имеет конечную вторую производную во всем промежутке $\mathcal{X}$, т. е. в каждой точке этого промежутка, то ее производная, конечная или нет, в какой-либо точке x_0 из $\mathcal{X}$ называется **производной третьего порядка**, или **третьей производной** функции $y=f(x)$ в этой точке, и обозначается так:

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \quad y''', \quad D^3y; \quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3}, \quad f'''(x_0), \quad D^3f(x_0).$$

Подобным же образом от третьей производной переходим к четвертой и т. д. Если предположить, что понятие $(n-1)$-й производной уже определено и что $(n-1)$-я производная существует и конечна в промежутке $\mathcal{X}$, то ее производная в некоторой точке x_0 этого промежутка называется **производной n-го порядка**, или **n-й производной** от исходной функции $y=f(x)$; для обозначения ее применяются символы:

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \quad y^{(n)}, \quad D^ny; \quad \frac{d^nf(x_0)}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x_0), \quad D^nf(x_0).$$

Иной раз — при пользовании обозначениями Лагранжа или Коши — может возникнуть надобность в указании переменной, по которой берется производная; тогда ее пишут в виде значка внизу:

$$y''_{x^2}, \quad D^3_{x^3}f(x), \quad f^{(n)}_{x^n}(x_0) \quad \text{и т. п.,}$$

причем x^2, x^3, ... есть условная сокращенная запись вместо xx, xxx, ... Например, можно писать: $a=s''_{t^2}$.

(Читателю ясно, что и здесь **цельные** символы

$$\frac{d^nf}{dx^n}, \quad f^{(n)} \text{ или } f^{(n)}_{x^n}, \quad D^nf \text{ или } D^n_{x^n}f$$

можно рассматривать как функциональные обозначения.)

Таким образом, мы определили понятие n-й производной, как говорят, индуктивно, переходя по порядку от первой производной к последующим. Соотношение, определяющее n-ю производную

$$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]',$$

называют также рекуррентным (или «возвратным»), поскольку оно «возвращает» нас от n-й производной к $(n-1)$-й.

Самое вычисление производных n-го порядка, **при численно заданном n**, производится по известным уже читателю правилам и формулам.

Например, если

$$y=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^3+2x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{2},$$

то

$$y'=2x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+\frac{4}{3},\quad y''=6x^2-x+4,$$

$$y'''=12x-1,\quad y''''=12,$$

так что все последующие производные равны тождественно нулю. Или пусть

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

тогда

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad y''=-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}},\quad y'''=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}} \text{ и т. д.}$$

Заметим, что по отношению к производным высших порядков так же, индуктивно, можно установить понятие односторонней производной [ср. n° 86] Если функция $y=f(x)$ определена лишь в некотором промежутке $\mathcal{X}$, то, говоря о производной любого порядка на конце его, всегда имеют в виду именно одностороннюю производную.

96. Общие формулы для производных любого порядка. Итак, для того, чтобы вычислить n-ю производную от какой-либо функции, вообще говоря, нужно предварительно вычислить производные всех предшествующих порядков. Однако в ряде случаев удается установить такое общее выражение для n-й производной, которое зависит непосредственно от n и не содержит более обозначений предшествующих производных.

При выводе таких общих выражений иногда бывают полезны формулы:

$$(cu)^{(n)}=c\cdot u^{(n)},\qquad (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

обобщающие на случай высших производных известные читателю правила I и II n° **83**. Их легко получить последовательным применением этих правил.

1) Рассмотрим сначала степенную функцию $y=x^{\mu}$, где μ — любое вещественное число. Имеем последовательно:

$$y'=\mu x^{\mu-1},\quad y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},\ \ldots$$

Легко усмотреть отсюда и общий закон:

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

который доказывается по методу математической индукции.

Если, например, взять $\mu=-1$, то получим

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}.$$

Когда само μ есть натуральное число m, то m-я производная от x^m будет уже постоянным числом $m!$, а все следующие — нулями. Отсюда ясно, что и для целого многочлена степени m имеет место аналогичное обстоятельство.

2) Пусть теперь $y = \ln x$. Прежде всего, имеем

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Возьмем отсюда производную $(n-1)$-го порядка по соответствующей формуле из 1), заменив в ней n на $n-1$; мы и получим тогда

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3) Если $y = a^x$, то

$$y' = a^x \cdot \ln a, \quad y'' = a^x \cdot (\ln a)^2, \ \ldots$$

Общая формула

$$y^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$$

легко доказывается по методу математической индукции.

В частности, очевидно,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

4) Положим $y = \sin x$; тогда

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x,$$

$$y'''' = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \ \ldots$$

На этом пути найти требуемое общее выражение для n-й производной трудно. Но дело сразу упрощается, если переписать формулу для первой производной в виде $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; становится ясным, что при каждом дифференцировании к аргументу будет прибавляться $\frac{\pi}{2}$, так что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично получается и формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

5) Остановимся еще на функции $y = \operatorname{arctg} x$. Поставим себе задачей выразить $y^{(n)}$ через y. Так как $x = \operatorname{tg} y$, то

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Дифференцируя вторично по x (и помня, что y есть функция от x), получим

$$y'' = \left[-\sin y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' =$$

$$= \cos^2 y \cdot \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следующее дифференцирование дает:

$$y''' = \left[-2\sin y \cdot \cos y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos^2 y \cdot \cos 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' =$$

$$= 2\cos^3 y \cdot \cos\left(3y + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y \cdot \sin 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Общая формула

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

оправдывается по методу математической индукции.

97. Формула Лейбница. Как мы заметили в начале предыдущего номера, правила I и II п° **83** непосредственно переносятся и на случай производных любого порядка. Сложнее обстоит дело с правилом III, относящимся к дифференцированию произведения.

Предположим, что функции u, v от x имеют каждая в отдельности производные до n-го порядка включительно; докажем, что тогда их произведение $y = uv$ также имеет n-ю производную, и найдем ее выражение.

Станем, применяя правило III, последовательно дифференцировать это произведение; мы найдем:

$$y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \ \ldots$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение степеней бинома: $u + v$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, ..., лишь вместо степеней u, v стоят производные соответствующих порядков. Сходство станет более полным, если

в полученных формулах вместо u, v писать $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Распространяя этот закон на случай любого n, придем к общей формуле *):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} =$$

$$= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} v'' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \ldots i} u^{(n-i)} v^{(i)} + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (1)$$

Для доказательства ее справедливости прибегнем снова к методу математической индукции. Допустим, что при некотором значении n она верна. Если для функций u, v существуют и $(n+1)$-е производные, то можно (1) еще раз продифференцировать по x; мы получим:

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [u^{(n-i)} v^{(i)}]' = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}.$$

Объединим теперь слагаемые обеих последних сумм, содержащие одинаковые произведения производных функций u и v (сумма порядков производных в таком произведении, как легко видеть, равна всегда $n+1$). Произведение $u^{(n+1)} v^{(0)}$ входит только в первую сумму (при $i=0$); коэффициент его в этой сумме есть $C_n^0 = 1$. Точно так же $u^{(0)} v^{(n+1)}$ входит только во вторую сумму (в слагаемое с номером $i=n$), с коэффициентом $C_n^n = 1$. Все остальные произведения, входящие в эти суммы, имеют вид $u^{(n+1-k)} v^{(k)}$, причем $1 \leqslant k \leqslant n$. Каждое такое произведение встретится как в первой сумме (слагаемое с номером $i=k$), так и во второй сумме (слагаемое с номером $i=k-1$). Сумма соответствующих коэффициентов будет $C_n^k + C_n^{k-1}$. Но, как известно,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

*) Символ $\sum$ означает сумму однотипных слагаемых. Когда слагаемые зависят от одного значка, меняющегося в определенных границах, то эти границы и указываются (снизу и сверху). Например,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}, \text{ и т. д.}$$

Таким образом, окончательно находим:

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k} u^{[(n+1)-k]} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \\ = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} u^{[(n+1)-k]} v^{(k)},$$

так как

$$C_{n+1}^{0} = C_{n+1}^{n+1} = 1.$$

Мы получили для $y^{(n+1)}$ выражение, вполне аналогичное выражению (1) (только n заменилось числом $n+1$); этим и доказана справедливость формулы (1) для всех натуральных значений n.

Установленная формула носит название *формулы Лейбница*. Она часто бывает полезна при выводе общих выражений для n-й производной.

Заметим, что такую же формулу можно было бы установить и для n-й производной произведения *нескольких* сомножителей $y = uv \ldots t$; она имеет сходство с разложением степени многочлена $(u+v+\ldots+t)^n$.

Пример. Найдем общее выражение для n-й производной функции

$$y = e^{ax} \cdot \sin bx.$$

По формуле Лейбница получим:

$$y^{(n)} = e^{ax} \cdot a^n \cdot \sin bx + ne^{ax} \cdot a^{n-1} b \cdot \cos bx - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{ax} \cdot a^{n-2} b^2 \cdot \sin bx - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{ax} \cdot a^{n-3} b^3 \cdot \cos bx + \ldots$$

или

$$y^{(n)} = e^{ax} \left\{ \sin bx \left[a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots \right] + \right. \\ \left. + \cos bx \left[na^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots \right] \right\}.$$

98. Дифференциалы высших порядков. Обратимся теперь к дифференциалам высших порядков; они также определяются индуктивно. *Дифференциалом второго порядка*, или *вторым дифференциалом*, функции $y = f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от ее (первого) дифференциала; в обозначениях:

$$d^2y = d(dy).$$

Дифференциалом третьего порядка, или *третьим дифференциалом*, называется дифференциал от второго дифференциала:

$$d^3y = d(d^2y).$$

Вообще, дифференциалом n-го порядка, или n-м дифференциалом, функции $y = f(x)$ называется дифференциал ее $(n-1)$-го дифференциала:

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Если пользоваться функциональным обозначением, то последовательные дифференциалы могут быть обозначены так:

$$d^2 f(x_0),\ d^3 f(x_0),\ \ldots,\ d^n f(x_0),\ \ldots,$$

причем получается возможность указать то частное значение $x = x_0$, при котором дифференциалы берутся.

При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно помнить, что dx есть произвольное и независящее от x число, которое при дифференцировании по x надлежит рассматривать как постоянный множитель. В таком случае будем иметь (все время предполагая существование соответствующих производных):

$$d^2 y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y'' dx^2,$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(y'' \cdot dx) = dy'' \cdot dx = (y''' \cdot dx) \cdot dx2 = y''' dx^3, \text{*)}$$

и т. д. Легко угадываемый общий закон

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \tag{2}$$

доказывается методом математической индукции. Из него следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

так что отныне этот символ можно рассматривать как дробь.

Воспользовавшись равенством (2), легко теперь преобразовать формулу Лейбница к дифференциалам. Достаточно умножить обе части ее на dx^n, чтобы получить

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, d^{n-i}u \cdot d^i v \qquad (d^0 u = u,\quad d^0 v = v).$$

Сам Лейбниц нашел свою формулу именно в этом виде.

99. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков. Вспоминая, что первый дифференциал функции обладает свойством инвариантности формы, естественно поставить вопрос, обладают ли подобным свойством дифференциалы высших порядков. Покажем, например, что уже второй дифференциал этим свойством не обладает.

Итак, пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$, так что y можно рассматривать как сложную функцию от t: $y = f(\varphi(t))$. Ее (первый) дифференциал по t можно написать в форме: $dy = y'_x \cdot dx$, где $dx = x'_t \cdot dt$

---

*) Под dx^2, dx^3, ... и т. п. всегда разумеются степени дифференциала: $(dx)^2$, $(dx)^3$, ... Дифференциал от степени будет обозначаться так: $d(x^2)$, $d(x^3)$, ...

есть функция от t. Вычисляем второй дифференциал по t:

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx).$$

Дифференциал dy'_x можно, снова пользуясь инвариантностью формы (первого) дифференциала, взять в форме: $dy'_x = y''_{x^2} \cdot dx$, так что окончательно

$$d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x, \tag{3}$$

в то время как при независимой переменной x второй дифференциал имел вид $d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2$. Конечно, выражение (3) для d^2y является более общим: если, в частности, x есть независимая переменная, то $d^2x = 0$ — и остается один лишь первый член.

Возьмем пример. Пусть $y = x^2$, так что, покуда x — независимая переменная:

$$dy = 2x \cdot dx, \quad d^2y = 2\,dx^2.$$

Положим теперь $x = t^2$; тогда $y = t^4$, и

$$dy = 4t^3\,dt, \quad d^2y = 12t^2\,dt^2.$$

Новое выражение для dy может быть получено и из старого, если туда подставить $x = t^2$, $dx = 2t\ dt$. Иначе обстоит дело с d^2y: сделав такую же подстановку, мы получим $8t^2\,dt^2$ вместо $12t^2\,dt^2$!

Формула (3) в этом случае имеет вид:

$$d^2y = 2dx^2 + 2x\,d^2x.$$

Подставив сюда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $d^2x = 2\,dt^2$, получим уже правильный результат: $12t^2\,dt^2$.

Итак, если x перестает быть независимой переменной, то дифференциал второго порядка d^2y выражается через дифференциалы x двучленной формулой (3). Для дифференциалов третьего и дальнейших порядков число добавочных (при переходе к новой независимой переменной) членов еще возрастает. В соответствии с этим в выражениях высших производных y''_{x^2}, y'''_{x^3}, ... через дифференциалы

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3}, \ \ldots \tag{4}$$

уже нельзя дифференциалы брать по любой переменной, но лишь по переменной x.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ

100. Теорема Ферма. Знание производной (или ряда производных) некоторой функции позволяет делать заключения о поведении самой функции. В основе различных приложений понятия производной (см. главы VII и XIII) лежат некоторые простые, но важные теоремы и формулы, которым и посвящена настоящая глава.

Начнем с одного вспомогательного предложения, которое справедливо было бы назвать именем Ферма *). Разумеется, в приводимой ниже форме этого предложения у него нет (Ферма еще не располагал понятием производной), но оно все же воспроизводит с у щ н о с т ь того приема, который применял Ферма для разыскания наибольших и наименьших значений функции (см. главу XIV).

Теорема Ферма. *Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathcal{X}$ и во в н у т р е н н е й точке c этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в этой точке существует конечная производная $f'(c)$, то необходимо $f'(c)=0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f(x)$ принимает в точке c н а и б о л ь ш е е значение, так что для всех x из $\mathcal{X}$

$$f(x)\leqslant f(c).$$

По определению производной:

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

причем предел этот не зависит от того, будет ли x приближаться к c справа или слева. Но при $x>c$ выражение

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0,$$

---

*) Пьер Ф е р м а (1601—1665) — выдающийся французский математик, тесно связанный с п р е д и с т о р и е й анализа бесконечно малых (см. главу XIV).

12 Зак. 1413. Г. М. Фихтенгольц, I

так что и в пределе, при $x \to c+0$, получится:

$$f'(c) \leqslant 0. \tag{1}$$

Если же $x < c$, то

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0,$$

и — переходя здесь к пределу при $x \to c-0$ — найдем:

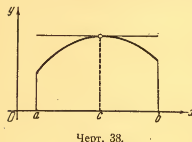
$$f'(c) = 0. \tag{2}$$

Сопоставляя соотношения (1) и (2), приходим к требуемому заключению:

$$f'(c) = 0.$$

Замечание. Проведенное рассуждение, в сущности, доказывает, что в упомянутой точке c не может существовать и (двухсторонней) бесконечной производной. Таким образом, заключение теоремы сохранится, если предположить в этой точке существование (двухсторонней) производной, не делая наперед оговорки, что она конечна.

Вспомним [п°п° **77, 78**] геометрическое истолкование производной $y' = f'(x)$ как углового коэффициента касательной к кривой $y = f(x)$. Обращение в нуль производной $f'(c)$ геометрически означает, что в соответствующей точке этой кривой касательная параллельна оси x. Чертеж 38 делает это обстоятельство совершенно наглядным.



Черт. 38.

В доказательстве существенно было использовано предположение, что c является внутренней точкой промежутка, так как нам пришлось рассматривать и точки x справа от c, и точки x слева от c. Без этого предположения теорема перестала бы быть верной: если функция $f(x)$ определена в замкнутом промежутке и достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на одном из концов этого промежутка, то производная $f'(x)$ на этом конце (если существует) может и не быть нулем. Предоставляем читателю подыскать соответствующий пример.

101. Теорема Ролля. В основе многих теорем и формул дифференциального исчисления и его приложений лежит следующая простая, но важная теорема, связываемая с именем Ролля*).

Теорема Ролля. *Пусть*: 1) *функция* $f(x)$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$; 2) *существует конечная*

*) Мишель Ролль (1652—1719)—французский математик, который долгое время был противником нового исчисления и примкнул к нему уже на склоне лет. Приводимая в тексте теорема была высказана им лишь для многочленов.

производная $f'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* (a, b)*); 3) *на концах промежутка функция принимает равные значения*: $f(a) = f(b)$.

Тогда между a *и* b *найдется такая точка* c $(a < c < b)$, *что* $f'(c) = 0$.

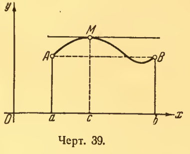
Доказательство. $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и потому по второй теореме Вейерштрасса [n° **73**] принимает в этом промежутке как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m.

Рассмотрим два случая:

1. $M = m$. Тогда $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение: в самом деле, неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ в этом случае дает $f(x) = M$ при всех x; поэтому $f'(x) = 0$ во всем промежутке, так что в качестве c можно взять любую точку из (a, b).

2. $M > m$. Мы знаем, что оба эти значения функцией достигаются, но, так как $f(a) = f(b)$, то они не могут оба достигаться на концах промежутка, и хоть одно из них достигается в некоторой точке c между a и b. В таком случае из теоремы Ферма следует, что производная $f'(c)$ в этой точке обращается в нуль. Теорема доказана.

На геометрическом языке теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси x (черт. 39).



Черт. 39.

Обращаем внимание на то, что непрерывность функции $f(x)$ в замкнутом промежутке $[a, b]$ и наличие производной во всем открытом промежутке (a, b) существенны для справедливости заключения теоремы. Функция $f(x) = x - E(x)$ удовлетворяет в промежутке $[0, 1]$ всем условиям теоремы, за исключением того, что имеет разрыв при $x = 1$, а производная $f'(x) = 1$ везде в $(0, 1)$. Функция, определяемая равенствами $f(x) = x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ и $f(x) = 1 - x$ при $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, также удовлетворяет всем условиям в том же промежутке, исключая лишь то обстоятельство, что при $x = \frac{1}{2}$ не существует (двухсторонней) производной; в то же время производная $f'(x) = +1$ в левой половине промежутка и $f'(x) = -1$ — в правой.

Точно так же существенно и условие 3) теоремы: функция $f(x) = x$ в промежутке $[0, 1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы, кроме условия 3), а ее производная $f'(x) = 1$ повсюду.

Чертежи предоставляем читателю.

*) Конечно, непрерывность функции $f(x)$ в (a, b) уже следует из 2), но мы ни здесь, ни в последующем не ставим себе целью расчленять условие теоремы на взаимно независимые предположения.

102. Теорема о конечных приращениях. Обратимся к непосредственным следствиям теоремы Ролля. Первым из них является следующая теорема о конечных приращениях, принадлежащая Лагранжу.

Теорема Лагранжа. *Пусть*: 1) $f(x)$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$, 2) *существует конечная производная* $f'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* (a, b). *Тогда между* a *и* b *найдется такая точка* c $(a < c < b)$, *что для нее выполняется равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{3}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию, определив ее в промежутке $[a, b]$ равенством:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна в $[a, b]$, так как представляет собой разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией. В промежутке (a, b) она имеет определенную конечную производную, равную

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

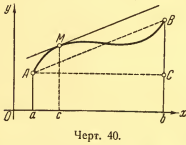
Наконец, непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $F(a)=F(b)=0$, т. е. $F(x)$ принимает равные значения на концах промежутка.

Следовательно, к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля и утверждать существование в (a, b) такой точки c, что $F'(c)=0$. Таким образом,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ откуда}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$

что и требовалось доказать.



Черт. 40.

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа; замечания относительно условий 1) и 2) теоремы, сделанные выше, сохраняют свою силу и здесь.

Обращаясь к геометрическому истолкованию теоремы Лагранжа (черт. 40), заметим, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{CB}{AC}$$

есть угловой коэффициент секущей AB, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=c$. Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB всегда найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.

Доказанная формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{или} \quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

носит название формулы Лагранжа или формулы конечных приращений. Она, очевидно, сохраняет силу для случая $a>b$.

Возьмем любое значение x_0 в промежутке $[a, b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \gtrless 0$, не выводящее его за пределы промежутка. Применим формулу Лагранжа к промежутку $[x_0, x_0+\Delta x]$ при $\Delta x>0$ или к промежутку $[x_0+\Delta x, x_0]$ при $\Delta x<0$. Тогда формула Лагранжа примет вид:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(c) \tag{3a}$$

или

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\,\Delta x. \tag{4}$$

Число c, заключенное в этом случае между x_0 и $x_0+\Delta x$, можно представить так:

$$c=x_0+\theta\cdot\Delta x, \quad \text{где } 0<\theta<1\,^{*)}.$$

Это равенство, дающее точное выражение для приращения функции при любом конечном приращении Δx аргумента, естественно противоставляется приближенному равенству [n°**93**, (3a)]

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

относительная погрешность которого стремится к нулю лишь при бесконечно малом Δx. Отсюда и упоминание о «конечных приращениях» в названии формулы (и теоремы).

К невыгоде формулы Лагранжа — в ней фигурирует неизвестное нам число c (или θ)**). Это не мешает, однако, многообразным применениям этой формулы в анализе.

---

*) Иногда говорят, что θ есть «правильная дробь»; не следует только думать, что речь идет о рациональной дроби — число θ может оказаться и иррациональным.

**) Лишь в немногих случаях мы можем его установить; например, для квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$, как легко проверить, имеем всегда $\theta=\frac{1}{2}$.

103. Предел производной. Полезный пример такого применения дает следующее замечание. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ и имеет конечную производную $f'(x)$ для $x>x_0$. Если существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = K,$$

то такова же будет и производная в точке x_0 справа. Действительно, при $0<\Delta x\leqslant H$ имеем равенство (3а). Так как аргумент c производной содержится между x_0 и $x_0+\Delta x$, то при $\Delta x\to 0$ он стремится к x_0, так что правая часть равенства, а с нею и левая стремится к пределу K, что и требовалось доказать. Аналогичное утверждение устанавливается и для левосторонней окрестности точки x_0.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x) = x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

в промежутке $[-1, 1]$. Если $-1<x<1$, то по обычным правилам дифференциального исчисления легко найти:

$$f'(x) = \arcsin x.$$

При $x\to 1-0$ $(x\to -1+0)$ эта производная, очевидно, стремится к пределу $\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; значит и при $x=\pm 1$ существуют (односторонние) производные: $f'(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Если вернуться к функциям $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$, которые мы рассматривали в n° 87, то для них (при $x\gtrless 0$) имеем:

$$f_1'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}, \quad f_2'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

Так как первое из этих выражений при $x\to 0$ стремится к $+\infty$, а второе при $x\to\pm 0$ имеет — соответственно — пределы $\pm\infty$, то заключаем сразу, что $f_1(x)$ в точке $x=0$ имеет двухстороннюю производную $+\infty$, в то время как для $f_2(x)$ в этой точке существуют лишь односторонние производные: $+\infty$ справа и $-\infty$ слева.

Из сказанного вытекает также, что, если конечная производная $f'(x)$ существует в некотором промежутке, то она представляет собою функцию, которая не может иметь обыкновенных разрывов или скачков: в каждой точке она либо непрерывна, либо имеет разрыв второго рода [ср. 88, 2°].

104. Обобщенная теорема о конечных приращениях. Коши следующим образом обобщил теорему о конечных приращениях предыдущего номера.

Теорема Коши. *Пусть:* 1) *функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в замкнутом промежутке $[a, b]$;* 2) *существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке (a, b);* 3) *$g'(x)\neq 0$ в промежутке (a, b).*

Тогда между a и b найдется такая точка c, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

Эта формула носит название формулы Коши

Доказательство. Установим сперва, что знаменатель левой части нашего равенства не равен нулю, так как в противном случае выражение это не имело бы смысла. Если бы было $g(b)=g(a)$, то, по теореме Ролля, производная $g'(x)$ в некоторой промежуточной точке была бы равна нулю, что противоречит условию 3); значит, $g(b)\neq g(a)$.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна в $[a, b]$, так как непрерывны $f(x)$ и $g(x)$; производная $F'(x)$ существует в (a, b), именно, она равна

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

Наконец, прямой подстановкой убеждаемся, что $F(a)=F(b)=0$. Применяя названную теорему, заключаем о существовании между a и b такой точки c, что $F'(c)=0$. Иначе говоря,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0,$$

или

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

Разделив на $g'(c)$ (это возможно, так как $g'(c)\neq 0$), получаем требуемое равенство.

Ясно, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для получения формулы конечных приращений из формулы Коши следует положить $g(x)=x$.

В теоремах n°n° **101**, **102**, **104** фигурирует, под знаком производной, некое среднее значение независимой переменной, которое — как указывалось — вообще нам неизвестно. Оно и производной доставляет, в некотором смысле, среднее значение. В связи с этим все эти теоремы называют «теоремами о средних значениях».

§ 2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

105. Формула Тейлора для многочлена. Если $p(x)$ есть целый многочлен степени n:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n, \tag{1}$$

то, последовательно дифференцируя его n раз:

$$p'(x)=a_1+2\cdot a_2x+3\cdot a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1},$$

$$p''(x)=1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+\ldots+(n-1)n\cdot a_nx^{n-2},$$

$$p'''(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)n\cdot a_nx^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot a_n$$

и полагая во всех этих формулах $x=0$, найдем выражения коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных при $x=0$:

$$a_0=p(0),\quad a_1=\frac{p'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{p''(0)}{2!},$$

$$a_3=\frac{p'''(0)}{3!},\ \ldots,\ a_n=\frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставим эти значения коэффициентов в (1):

$$p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (2)$$

Эта формула отличается от (1) записью коэффициентов.

Вместо того чтобы разлагать многочлен по степеням x, можно было бы взять его разложение по степеням $x-x_0$, где x_0 есть некоторое постоянное частное значение x:

$$p(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+$$
$$+\ldots+A_n(x-x_0)^n. \quad (3)$$

Полагая $x-x_0=\xi$, $p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$, для коэффициентов многочлена

$$P(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\ldots+A_n\xi^n$$

имеем, по доказанному, выражения:

$$A_0=P(0),\quad A_1=\frac{P'(0)}{1!},\quad A_2=\frac{P''(0)}{2!},$$

$$A_3=\frac{P'''(0)}{3!},\ \ldots,\ A_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Но

$$P(\xi)=p(x_0+\xi),\quad P'(\xi)=p'(x_0+\xi),$$
$$P''(\xi)=p''(x_0+\xi),\ \ldots,$$

так что

$$P(0)=p(x_0),\quad P'(0)=p'(x_0),\quad P''(0)=p''(x_0),\ \ldots$$

и

$$\left.\begin{aligned} A_0=p(x_0),\quad A_1=\frac{p'(x_0)}{1!},\quad A_2=\frac{p''(x_0)}{2!},\\ A_3=\frac{p'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\ A_n=\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

т. е. коэффициенты разложения (3) оказались выраженными через значения самого многочлена и его производных при $x=x_0$.

Подставим в (3) выражения (4):

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (5)$$

Формула (5), так же как и ее частный (при $x_0=0$) случай (2), называется формулой Тейлора. Впрочем, формулу (2) обычно называют формулой Маклорена*). Известно, какие важные применения формула Тейлора имеет в алгебре.

Сделаем (полезное для дальнейшего) очевидное замечание, что если многочлен $p(x)$ представлен в виде

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-x_0)+\frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{c_3}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n,$$

то необходимо

$$p(x_0)=c_0,\quad p'(x_0)=c_1,\quad p''(x_0)=c_2,\ \ldots,\ p^{(n)}(x_0)=c_n.$$

106. Разложение произвольной функции. Обратимся теперь к рассмотрению произвольной функции $f(x)$, вообще не являющейся целым многочленом, но определенной в некотором промежутке $\mathscr{X}$. Предположим, что для нее в точке x_0 (из $\mathscr{X}$) существуют производные всех порядков до n-го включительно. Это значит, точнее говоря, что функция имеет производные всех порядков до $(n-1)$-го включительно:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

в некоторой окрестности точки x_0, и, кроме того, имеет производную n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$ в самой точке x_0**). Тогда, по образцу (5), и для функции $f(x)$ может быть составлен многочлен

$$p_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (6)$$

---

*) Брук Тейлор (1685—1731) и Колин Маклорен (1698—1746) — английские математики, последователи Ньютона.

**) Если точка x_0 является одним из концов промежутка $\mathscr{X}$, то, говоря о производных в этой точке, мы имеем в виду односторонние производные; точно так же и под окрестностью точки x_0 в этом случае подразумевается односторонняя окрестность.

Согласно предшествующему замечанию, этот многочлен и его производные (до n-й включительно) в точке x_0 имеют те же значения, что и функция $f(x)$ и ее производные.

Но на этот раз, если только сама функция $f(x)$ не есть целый многочлен n-й степени, уже нельзя утверждать равенства $f(x) = p_n(x)$. Многочлен $p_n(x)$ дает лишь некоторое приближение к функции $f(x)$, с помощью которого она и может быть вычислена с некоторой степенью точности. В этой связи приобретает интерес оценка разности

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

или

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (7)$$

для данного x из $\mathscr{X}$ и данного n.

Написанное выражение $r_n(x)$ для этой цели служить не может. Чтобы представить его в более удобной для исследования форме, нам придется наложить на функцию $f(x)$ более тяжелые условия, чем те, которые непосредственно нужны для составления самого многочлена $p_n(x)$. Именно, мы будем предполагать впредь, что для функции $f(x)$ существуют в $\mathscr{X}$ все производные до $(n+1)$-го порядка включительно:

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x),\ f^{(n+1)}(x).$$

Фиксируем теперь любое значение x из промежутка $\mathscr{X}$, и по образцу правой части формулы (7), заменяя постоянное число x_0 на переменную z, составим новую, вспомогательную, функцию:

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) - \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 - \\ - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n,$$

причем независимую переменную z считаем изменяющейся в промежутке $[x_0, x]$ *). В этом промежутке функция $\varphi(z)$ непрерывна и принимает на концах его значения [см. (7)]:

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi(x) = 0. \quad (8)$$

Кроме того, в промежутке (x_0, x) существует производная

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x - z) - f'(z)\right] - \\ - \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x - z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x - z)\right] - \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x - z)^{n-1}\right]$$

*) Мы — для определенности — будем считать $x > x_0$.

или, после упрощения,

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n. \tag{9}$$

Если взять еще какую-нибудь функцию $\psi(z)$, непрерывную в промежутке $[x_0, x]$ и имеющую в открытом промежутке (x_0, x) производную, не обращающуюся в нуль, то к паре функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ можно будет применить формулу Коши [n° **104**]:

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

где c лежит между x_0 и x, т. е. $c = x_0 + \theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$. Учитывая (8) и (9), найдем отсюда

$$r_n(x) = -\frac{\psi(x_0)-\psi(x)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{10}$$

Выберем сначала функцию $\psi(z)$ так:

$$\psi(z) = (x-z)^{n+1};$$

сформулированные выше условия для нее выполнены. Имеем

$$\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1},\ \psi(x)=0,\ \psi'(c) = -(n+1)(x-c)^n.$$

Подставляя это в (10), окончательно, получим:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{11}$$

Теперь, учитывая (7) и (11), функцию $f(x)$ можно представить формулой

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{12}$$

которая от формулы Тейлора для многочлена отличается именно наличием дополнительного члена (11).

Форма (11) дополнительного члена принадлежит Лагранжу; в этой форме дополнительный член напоминает следующий очередной член формулы Тейлора, лишь вместо того, чтобы вычислять $(n+1)$-ю производную в точке x_0, эту производную берут для некоторого среднего — между x_0 и x — значения c.

Формулу (12) называют **формулой Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа**. Если перенести в ней $f(x_0)$ налево и положить $x - x_0 = \Delta x$, то она перепишется так:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}. \tag{12a}$$

В этом виде она является прямым обобщением формулы конечных приращений [n° **102**, (4)]

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x,$$

которая отвечает $n = 0$.

Хотя дополнительный член в форме Лагранжа, в смысле простоты, не оставляет желать лучшего, но все же в отдельных случаях эта форма оказывается непригодной для оценки дополнительного члена, и приходится прибегать к другим формам, менее простым. Из них упомянем здесь о дополнительном члене в форме Коши. Он получается из (10), если положить на этот раз $\psi(z) = x - z$. При этом

$$\psi(x_0) = x - x_0, \quad \psi(x) = 0, \quad \psi'(c) = -1$$

и, так как

$$(x - c)^n = [x - x_0 - \theta(x - x_0)]^n = (1 - \theta)^n (x - x_0)^n,$$

то приходим к такому окончательному выражению:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}. \qquad (13)$$

Несмотря на потерю (сравнительно с формой Лагранжа) множителя $n + 1$ в знаменателе, эта форма иной раз бывает выгоднее именно благодаря наличию в ней множителя $(1 - \theta)^n$.

Формула Тейлора с дополнительным членом в той или другой из указанных форм является, как видим, разновидностью теорем о средних значениях: здесь также фигурируют c и θ!

107. Другая форма дополнительного члена. Формы дополнительного члена в формуле Тейлора, выведенные выше, применяются в случаях, когда — при тех или иных фиксированных значениях x (отличных от x_0) — мы желаем заменить приближенно функцию $f(x)$ многочленом $p_n(x)$ и численно оценить проистекающую отсюда погрешность. Но бывают случаи, когда мы не заинтересованы в определенных значениях x, и нам важно лишь *поведение дополнительного члена при стремлении* x к x_0, точнее говоря, важен *порядок его малости*. Этот порядок может быть установлен даже при несколько более легких условиях, чем выше. Именно, предположим существование лишь n последовательных производных

$$f'(x), \; f''(x), \; \ldots, \; f^{(n)}(x)$$

в окрестности (двусторонней или односторонней) точки x_0 и *непрерывность последней из них в точке* x_0*). Тогда, заменяя

*) На деле, достаточно предположить лишь существование производной $f^{(n)}(x_0)$ в одной точке $x = x_0$. Мы наложили более тяжелые условия, чтобы упростить вывод.

в формуле (12) n на $n-1$, можем написать:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где c содержится между x_0 и x. Положим в последнем члене

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x); \tag{14}$$

так как при $x\to x_0$, очевидно, и $c\to x_0$, так что (по непрерывности) $f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0)$, то $\alpha(x)\to 0$ и $\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$. Окончательно, получим:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n); \tag{15}$$

таким образом, на этот раз

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n), \tag{16}$$

т. е. о дополнительном члене мы здесь знаем лишь, что при постоянном n и $x\to x_0$ он будет бесконечно малой порядка выше n-го по сравнению с $x-x_0$, хотя — это важно подчеркнуть — мы и ничего не знаем об его величине ни при одном фиксированном x. Форма (16) дополнительного члена была указана Пеано *).

Мы видим, что формула (15), действительно, имеет определенно «локальный» характер, характеризуя лишь поведение функции при стремлении x к x_0.

Если в (15) снова перенести $f(x_0)$ налево и положить $x-x_0=\Delta x$, то придем к разложению

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n), \tag{15a}$$

которое служит обобщением формулы (3) n°**82**:

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

получающейся отсюда при $n=1$.

Иной раз удобнее вместо (14) взять попросту

$$f_n(c)=f_n(x_0)+\alpha(x);$$

*) Джузеппе Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

здесь также $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, а формула Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано напишется так:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (17)$$

В заключение сделаем еще следующее замечание. Если заменить в формулах (12а) и (15а) Δx на dx и вспомнить, что

$$f'(x_0)\,dx=df(x_0),\quad f''(x_0)\,dx^2=d^2f(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)\,dx^n=d^nf(x_0)$$

и

$$f^{(n+1)}(c)\,dx^{n+1}=d^{n+1}f(c),$$

то, подставляя, представим эти разложения в виде

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c)$$
$$(c=x_0+\theta\,\Delta x,\quad 0<\theta<1) \qquad (12б)$$

или

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+o(\Delta x^n). \qquad (15б)$$

Таким образом, если предположить $\Delta x\to 0$, то по этим формулам из бесконечно малого приращения функции $\Delta f(x_0)$ выделяется не только его главный член — первый дифференциал, но и члены более высоких порядков малости, которые — с точностью до факториалов в знаменателях — совпадают с последовательными высшими дифференциалами

$$d^2f(x_0),\ \ldots,\ d^nf(x_0).$$

108. Приложение полученных формул к элементарным функциям. Всего проще выглядит формула Тейлора, если $x_0=0$ *):

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x). \qquad (18)$$

К этому частному случаю всегда можно свести дело, взяв $x-x_0$ за новую независимую переменную.

Рассмотрим некоторые конкретные разложения по этой формуле для элементарных функций.

*) И эту формулу связывают с именем Маклорена.

1) Пусть $f(x) = e^x$; тогда $f^{(k)}(x) = e^x$ при любом $k = 1, 2, 3, \ldots$ [96, 3)]. Так как в этом случае $f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 1$, то, по формуле (18),

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ [n° 96, 4)], так что

$$f(0) = 0, \quad f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0,$$

$$f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому, положив в формуле (18) $n = 2m$, имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x).$$

3) Аналогично, при $f(x) = \cos x$ [n° 96, 4)]

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad f(0) = 1, \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m,$$

$$f^{(2m-1)}(0) = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом (если взять $n = 2m + 1$):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!} + r_{2m+2}.$$

4) Рассмотрим теперь степенную функцию x^m, где m — не натуральное число и не нуль. В этом случае при $x \to 0$ либо сама функция (если $m < 0$), либо ее производные (начиная с некоторого порядка, при $n > m$) б е с к о н е ч н о в о з р а с т а ю т. Следовательно, здесь уже нельзя брать $x_0 = 0$.

Возьмем $x_0 = 1$, т. е. станем разлагать x^m по степеням $x - 1$. Впрочем, как уже упоминалось, можно ввести в качестве новой переменной $x - 1$; мы ее попрежнему будем обозначать через x, и станем разлагать функцию $(1 + x)^m$ по степеням x.

Как мы знаем [n° 96, 1)],

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

так что

$$f(0) = 1, \qquad f^{(k)}(0) = m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Разложение имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n + r_n(x).$$

5) Если перейти к логарифмической функции $\ln x$, которая стремится к $-\infty$ при $x \to +0$, то, как и в предыдущем примере, мы будем рассматривать функцию $f(x) = \ln(1+x)$ и разлагать ее по степеням x.

Тогда [n°**96**, 2)]

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\ ^{*)}}{(1+x)^k},$$

$$f(0) = 0, \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Отсюда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

6) Пусть теперь $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Из n°**96**, 5) легко получить значения ее производных при $x = 0$:

$$f^{(2m)}(0) = 0, \qquad f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}(2m-2)!$$

так что ее разложение представится в виде

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + r_{2m}(x).$$

109. Приближенные формулы. Примеры. Если в формуле (18) отбросить дополнительный член, то получится приближенная формула

$$f(x) \doteq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

заменяющая функцию сложной природы многочленом. Качество этой формулы оценивается двояко: либо указывают границу погрешности $r_n(x)$, обычно пользуясь лагранжевой формой дополнительного члена:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1),$$

либо довольствуются, следуя Пеано, указанием порядка малости этой погрешности при $x \to 0$:

$$r_n(x) = o(x^n).$$

Для примеров обратимся к рассмотренным выше разложениям элементарных функций.

1) Положим $f(x) = e^x$. Приближенная формула

$$e^x \doteq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!};$$

так как дополнительный член здесь

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

*) Мы подразумеваем, как всегда, что $0! = 1$.

то, например, при $x>0$ погрешность оценивается так:

$$0<r_n(x)<e^x\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В частности, если $x=1$,

$$e\doteq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},\qquad 0<r_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Подобной формулой мы уже пользовались в п° 49 для приближенного вычисления числа e, но оценка дополнительного члена, полученная другим путем, там была более точной.

2) Взяв $f(x)=\sin x$, получим

$$\sin x\doteq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

В этом случае дополнительный член:

$$r_{2m}(x)=\frac{\sin\left(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

и погрешность оценивается легко:

$$|r_{2m}(x)|\leqslant\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

В частности, если мы довольствуемся одним членом и полагаем

$$\sin x\doteq x,$$

то для того, чтобы погрешность была меньше, скажем, чем 0,001, достаточно взять (считая $x>0$)

$$\frac{x^3}{6}<0{,}001\quad\text{или}\quad x<0{,}1817,$$

что примерно равно 10°. При пользовании двучленной формулой

$$\sin x\doteq x-\frac{x^3}{6}$$

для достижения той же точности уже достаточно взять

$$\frac{x^5}{120}<0{,}001\quad\text{или}\quad x<0{,}6544\quad(\doteq 37{,}5^\circ);$$

если же ограничиться углами $x<0{,}4129$ ($\doteq 23{,}5^\circ$), то погрешность будет даже $<0{,}0001$, и т. д.

3) Аналогично, для $f(x)=\cos x$ имеем

$$\cos x\doteq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{2m!},$$

причем

$$r_{2m+1}(x)=(-1)^{m+1}\cos\theta x\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

так что

$$|r_{2m+1}(x)|\leqslant\frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Например, для формулы

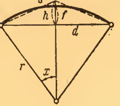
$$\cos x\doteq 1-\frac{x^2}{2}$$

погрешиость

$$|r_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24}$$

и навернсе будет, скажем, $<0{,}0001$ для $x < 0{,}2213$ ($\doteq 13°$), и т. п.

Мы обращаем внимание читателя на существенное продвижение вперед по сравнению с формулами n°n° **56**, **57**, **93**: *теперь мы умеем устанавливать границы погрешности и располагаем формулами любой точности.*



Черт. 41.

Наконец, приведем пример приближеиной формулы совсем иного типа, но все же использующей формулу Тейлора.

4) Для приближеиного спрямления дуги окружности, малой по сравиеиию с радиусом (черт. 41), Чебышёв*) дал следующее правило: *дуга s приближенно равна сумме равных сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде d и имеющего высотой $\sqrt{\frac{4}{3}}$ стрелки f.*

Если половину центральиого угла обозначить через x, а радиус дуги — через r, то $s = 2rx$. С другой стороны,

$$\frac{1}{2} d = r \sin x = r\left\{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right\}, \quad \left(\frac{1}{2} d\right)^2 = r^2\left\{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right\},$$

$$h = \sqrt{\frac{4}{3}} f = \sqrt{\frac{4}{3}}\, r(1 - \cos x) = \sqrt{\frac{4}{3}}\, r\left\{\frac{1}{2} x^2 + o(x^3)\right\},$$

$$h^2 = r^2\left\{\frac{x^4}{3} + o(x^5)\right\},$$

так что упомяиутая сумма сторон, по теореме Пифагора, равна

$$2\sqrt{\left(\frac{1}{2} d\right)^2 + h^2} = 2r\sqrt{x^2 + o(x^5)} = 2rx\sqrt{1 + o(x^3)} = 2rx + o(x^4).$$

Читателю ясно, что назначение множителя $\sqrt{\frac{4}{3}}$ в формуле Чебышёва именно в том, чтобы под корнем уничтожился член с x^4. В окончательном счете, получеиное приближенное значение дуги отличается от самой дуги величиной выше четвертого порядка малости.

Мы вернемся к формуле Тейлора с дополнительным членом в главе XV (второй том), посвященной бесконечным рядам, где эта формула будет играть весьма важную роль. Там же будут приведены примеры приложения рядов к приближенным вычислениям, которые зачастую, по существу, являются применениями формулы Тейлора.

*) Академик Пафнутий Львович Чебышёв (1821—1894) — великий русский математик, основатель петербургской математической школы.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. ИЗУЧЕНИЕ ХОДА ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ

110. Условие постоянства функции. При изучении хода изменения функции на первом месте появляется вопрос об условиях, при которых функция сохраняет в данном промежутке постоянное значение или изменяется в нем монотонно [n°47].

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $\mathscr{X}$* *) *и имеет внутри него конечную производную $f'(x)$, а на концах (если они принадлежат $\mathscr{X}$) сохраняет непрерывность. Для того чтобы $f(x)$ была в $\mathscr{X}$ постоянной, достаточно условие*

$$f'(x)=0 \quad \textit{внутри} \quad \mathscr{X}.$$

Доказательство. Пусть это условие выполнено. Фиксируем некоторую точку x_0 из промежутка $\mathscr{X}$ и возьмем любую другую его точку x. Для промежутка $[x_0, x]$ или $[x, x_0]$ удовлетворены все условия теоремы Лагранжа [n°102]. Следовательно, можем написать

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),$$

где c содержится между x_0 и x, а значит, заведомо лежит внутри $\mathscr{X}$. Но, по предположению, $f'(c)=0$, так что для всех x из $\mathscr{X}$

$$f(x)=f(x_0)=\text{const},$$

и наше утверждение доказано.

Заметим, что высказанное условие, очевидно, является и необходимым для постоянства функции.

В интегральном исчислении важное приложение найдет вытекающее отсюда простое

Следствие. *Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $\mathscr{X}$ и внутри него имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, а на концах (если они принадлежат $\mathscr{X}$) сохраняют непрерывность. Если при этом*

$$f'(x)=g'(x) \ \textit{внутри} \ \mathscr{X},$$

---

*) Который может быть замкнутым или нет, конечным или бесконечным.

то во всем промежутке $\mathscr{X}$ эти функции разнятся лишь на постоянную:

$$f(x)=g(x)+C \quad (C=\text{const}).$$

Для доказательства достаточно применить теорему к разности $f(x)-g(x)$; так как ее производная $f(x)-g(x)$ внутри $\mathscr{X}$ сводится к нулю, то сама разность в $\mathscr{X}$ будет постоянной.

Рассмотрим в виде примера функции

$$\operatorname{arctg} x \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

Легко проверить, что их производные совпадают во всех точках x, исключая $x=\pm 1$ (где вторая из функций теряет смысл). Поэтому тождество

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

оказывается устаиовлеииым лишь для каждого из промежутков

$$\mathfrak{X}_1=(-1,\ 1),\ \mathfrak{X}_2=(-\infty,\ -1),\ \mathfrak{X}_3=(1,\ +\infty)$$

в отдельиости. Любопытио, что и значеиия постояииой C для этих промежутков будут различиыми. Для первого из них $C=0$ (в чем убеждаемся, полагая $x=0$), а для двух других имеем, соответствеиио, $C=\frac{\pi}{2}$ или $C=-\frac{\pi}{2}$ (что легко усмотреть, если, например, устремить x к $-\infty$ или $+\infty$). Все эти соотношеиия также могут быть доказаны элементарно.

Замечание. Значение доказанной теоремы проявляется в теоретических исследованиях и вообще в тех случаях, когда функция задана так, что из ее определения непосредственно не вытекает, что она сохраняет постоянное значение. Подобные случаи нам не раз встретятся в дальнейшем.

111. Условие монотонности функции. Выясним теперь, как по производной функции можно судить о возрастании (убывании) самой функции в данном промежутке.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $\mathscr{X}$ и имеет внутри него конечную производную $f'(x)$, а на концах (если они принадлежат $\mathscr{X}$) сохраняет непрерывность. Для того чтобы $f(x)$ была в $\mathscr{X}$ монотонно возрастающей (убывающей) в узком смысле, достаточно условие:*

$$f'(x)>0 \ (<0) \ \textit{внутри} \ \mathscr{X}.$$

Доказательство проведем для случая возрастания. Пусть же указанное для этого случая условие выполнено. Возьмем два значения x' и x'' ($x'<x''$) из $\mathscr{X}$, и к функции $f(x)$ в промежутке $[x',\ x'']$ применим формулу Лагранжа:

$$f(x'')-f(x')=f'(c)(x''-x') \qquad (x'<c<x'').$$

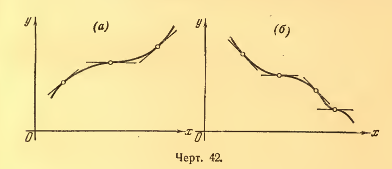
Так как $f'(c)>0$, то

$$f(x'')>f(x'),$$

и функция $f(x)$ будет строго возрастающей.

На этот раз высказанное условие уже не является в полной мере необходимым. Утверждение теоремы сохраняет силу, например, и в том случае, если производная $f'(x)$ обращается в нуль в конечном числе точек, лежащих внутри промежутка $\mathscr{X}$. В этом легко убедиться, если применить теорему в отдельности к каждой из частей, на которые основной промежуток разбивается упомянутыми точками.

Установленная связь между знаком производной и направлением изменения функции геометрически совершенно очевидна, если вспомнить [n°n°77, 78], что производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции. Знак этого углового коэффициента показывает, наклонена ли касательная вверх или вниз,



Черт. 42.

а с нею — идёт ли вверх или вниз и сама кривая (черт. 42). В отдельных точках касательная при этом может оказаться и горизонтальной, что отвечает обращению производной в нуль.

Примеры. 1) Простейший пример последнего обстоятельства доставляет функция $f(x)=x^3$: она возрастает, и тем не менее производная ее $f'(x)=3x^2$ при $x=0$ обращается в нуль.

2) Аналогично, возрастающей будет и функция

$$f(x)=x-\sin x,$$

ибо ее производная

$$f'(x)=1-\cos x$$

не отрицательна, обращаясь в нуль для значений $x=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

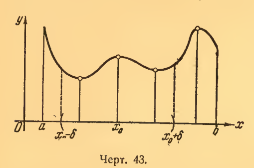
112. Максимумы и минимумы; необходимые условия. Если функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке $[a, b]$, не является в нем монотонной, то найдутся такие части $[\alpha, \beta]$ промежутка $[a, b]$, в которых наибольшее или наименьшее значение достигается функцией во внутренней точке, т. е. между α и β. На

графике функции (черт. 43) таким промежуткам соответствуют характерные горбы или впадины.

Говорят, что *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум* (*или минимум*)*), *если эту точку можно окружить такой окрестностью $(x_0-\delta, \; x_0+\delta)$, содержащейся в промежутке, где задана функция, что для всех ее точек x выполняется неравенство*

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

$$(\textit{или } f(x) \geqslant f(x_0)).$$



Черт. 43.

Иными словами, точка x_0 доставляет функции $f(x)$ максимум (минимум), если значение $f(x_0)$ оказывается наибольшим (наименьшим) из значений, принимаемых функцией в некоторой (хотя бы малой) окрестности этой точки. Отметим, что самое определение максимума (минимума) предполагает, что функция задана по обе стороны от точки x_0.

Если существует такая окрестность, в пределах которой (при $x \neq x_0$) выполняется строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{или } f(x) > f(x_0)),$$

то говорят, что функция имеет в точке x_0 собственный максимум (минимум), в противном случае — несобственный.

Если функция имеет максимумы в точках x_0 и x_1, то, применяя к промежутку $[x_0, x_1]$ вторую теорему Вейерштрасса [73], видим, что наименьшего своего значения в этом промежутке функция достигает в некоторой точке x_2 между x_0 и x_1 и имеет там минимум. Аналогично, между двумя минимумами непременно найдется максимум. В том простейшем (и на практике — важнейшем) случае, когда функция имеет вообще лишь конечное число максимумов и минимумов, они попросту чередуются.

Заметим, что для обозначения максимума или минимума существует и объединяющий их термин — экстремум**).

Поставим задачу о разыскании всех значений аргумента, доставляющих функции экстремум. При решении ее основную роль будет играть производная.

Предположим сначала, что для функции $f(x)$ в промежутке (a, b) существует конечная производная. Если в точке x_0 функция имеет

---

*) По-латыни слова maximum и minimum означают «наибольшее» и «наименьшее» (значение).

**) Латинское extremum, что означает «крайнее» (значение).

экстремум, то, применяя к промежутку $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, о котором была речь выше, теорему Ферма [n° **100**], заключаем, что $f'(x_0)=0$: в этом состоит необходимое условие экстремума. Экстремум следует искать только в тех точках, где производная равна нулю; такие точки будем называть стационарными*).

Не следует думать, однако, что каждая стационарная точка доставляет функции экстремум: указанное только что необходимое условие не является достаточным. Мы видели, например, в n° 111,1), что для функции x^3 производная $3x^2$ обращается в нуль при $x=0$, но в этой точке функция не имеет экстремума: она все время возрастает.

Таким образом, стационарная точка для функции $f(x)$ представляется, так сказать, лишь «подозрительной» по экстремуму и подлежит дальнейшему испытанию.

Если расширить класс рассматриваемых функций, допуская, что в отдельных точках нет конечной производной, то не исключена возможность того, что экстремум придется на одну из таких точек. Поэтому их также нужно отнести к числу «подозрительных» по экстремуму и подвергнуть испытанию.

113. Первое правило. Итак, пусть точка x_0 является «подозрительной» по экстремуму для функции $f(x)$.

Предположим, что в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ этой точки (по крайней мере, для $x \neq x_0$) существует конечная производная $f'(x)$ и как слева от x_0, так и справа от x_0 (в отдельности) сохраняет определенный знак. Тогда возможны следующие три случая:

I. $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$, т. е. *производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на минус.* В этом случае, в промежутке $[x_0-\delta, x_0]$ функция $f(x)$ возрастает, а в промежутке $[x_0, x_0+\delta]$ убывает, так что значение $f(x_0)$ будет наибольшим в промежутке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, т. е. в точке x_0 функция имеет максимум.

II. $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, т. е. *производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак минус на плюс.* В этом случае аналогично убеждаемся, что в точке x_0 функция имеет минимум.

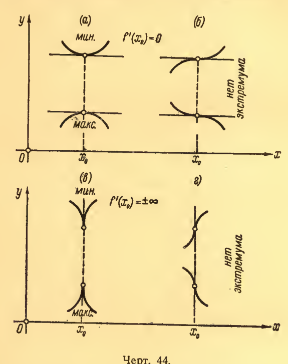
III. $f'(x)>0$ как при $x<x_0$, так и при $x>x_0$, либо же $f'(x)<0$ и слева и справа от x_0, т. е., *при переходе через x_0, $f'(x)$ не меняет знака.* Тогда функция либо все время возрастает, либо все время убывает; в любой близости x_0 с одной стороны найдутся точки x, в которых $f(x)<f(x_0)$, а с другой — точки x, в которых $f(x)>f(x_0)$, так что в точке x_0 никакого экстремума нет.

Итак, мы получаем первое правило для испытания «подозрительного» значения x_0: *подставляя в производную $f'(x)$ сначала*

*) В них изменение функции как бы «приостанавливается»: скорость этого изменения [n°78] обращается в нуль.

$x < x_0$, а затем $x > x_0$, устанавливаем знак производной поблизости от точки x_0 слева и справа от нее: если при этом производная $f'(x)$ меняет знак плюс на минус, то налицо максимум, если меняет знак минус на плюс, то — минимум; если же знака не меняет, то экстремума вовсе нет.

Охарактеризуем теперь тот класс функций, к которому мы будем применять это правило. Функция $f(x)$ предполагается непрерывной



Черт. 44.

в промежутке $[a, b]$ и имеющей в нем непрерывную же производную $f'(x)$, за исключением разве лишь конечного числа точек. В этих точках производная $f'(x)$ как слева, так и справа стремится к бесконечным пределам, совпадающим по знаку или нет: в первом случае существует двусторонняя бесконечная производная, а во втором — разнящиеся знаками односторонние производные *). Наконец, допустим еще, что обращается в нуль производная тоже лишь в конечном числе точек. Графическая иллюстрация различных возможностей для «подозрительных» по экстремуму точек дана на черт. 44.

*) Различение этих случаев как раз и осуществляется с помощью того исследования знака производной, о котором только-что была речь.

Отметим, что в случаях *б*, *в*, *г* кривая пересекает касательную, переходя с одной ее стороны на другую; в этих случаях, как говорят, кривая имеет перегиб.

Для функций рассматриваемого класса приведенное правило полностью решает интересующий нас вопрос. Дело в том, что для такой функции в промежутке (a, b) — всего лишь конечное число стационарных точек или точек, где отсутствует конечная производная:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < b, \tag{1}$$

и в любом промежутке

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_k, x_{k+1}), \ldots, (x_{n-1}, b) \tag{2}$$

производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Действительно, если бы $f'(x)$ меняла знак, например, в промежутке (x_k, x_{k+1}), то, ввиду предположенной непрерывности $f'(x)$ — по теореме Больцано — Коши [68] — она обращалась бы в нуль в некоторой точке между x_k и x_{k+1}, что невозможно, поскольку все корни производной содержатся в ряду точек (1).

По теореме n°111, в каждом из промежутков (2) функция изменяется строго монотонно.

Замечание. Хотя указанный класс функций охватывает все практически интересные случаи, но все же полезно дать себе отчет в том, что могут быть случаи, где наше правило исследования «подозрительных» значений неприложимо. Если, например, рассмотреть функцию, определяемую равенствами

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

то, как мы знаем [n°88, 2°], при $x = 0$ она имеет производную $f'(0) = 0$. Однако в любой близости от этой стационарной точки как слева, так и справа производная

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

бесконечное множество раз обращается в нуль, меняя при этом знак: правило неприложимо (хотя и без него непосредственно ясно, что экстремума нет).

114. Второе правило. Если точка x_0 — стационарная:

$$f'(x_0) = 0$$

и функция $f(x)$ имеет не только первую производную $f'(x)$ в окрестности этой точки, но и вторую производную $f''(x_0)$ в самой точке x_0, то всё испытание может быть сведено к рассмотрению знака этой последней производной, в предположении, что она отлична от нуля.

Действительно, по определению производной — с учетом (3) — имеем

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Но, по теореме 2) п°**37**, функция

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} \tag{4}$$

приобретает знак своего предела $f''(x_0)$, лишь только x (будучи отличным от x_0) достаточно близко к x_0 ($|x - x_0| < \delta$).

Пусть же, скажем, $f''(x_0) > 0$; тогда дробь (4) положительна для всех упомянутых значений x. Но для $x < x_0$ знаменатель $x - x_0 < 0$, следовательно, числитель $f'(x)$ необходимо тоже меньше нуля; наоборот, при $x > x_0$ будем иметь $x - x_0 > 0$, так что и $f'(x) > 0$. Иными словами, получается, что производная $f'(x)$ меняет знак минус на плюс, а тогда — уже по первому правилу — в точке x_0 будет минимум. Аналогично устанавливается, что, если $f''(x) < 0$, в точке x_0 налицо максимум.

Таким образом, можно сформулировать второе правило для испытания «подозрительного» значения x_0: *подставляем x_0 во вторую производную $f''(x)$; если $f''(x_0) > 0$, то функция имеет минимум, если же $f''(x_0) < 0$, то — максимум.*

Это правило имеет, вообще говоря, более узкий круг применения; оно, например, явно неприложимо к тем точкам, где не существует конечной первой производной (ибо там и речи быть не может о второй). В тех случаях, когда вторая производная обращается в нуль, правило также ничего не дает. Решение вопроса зависит тогда от поведения высших производных [см. п°**117**].

115. Построение графика функции. Умение находить значения x, доставляющие функции $y = f(x)$ экстремальные значения, может быть использовано для построения графика функции, точно характеризующего ход ее изменения при возрастании x в промежутке $[a, b]$.

Раньше [п°**19**] мы строили график по точкам, взятым более или менее густо, но случайно и без учета особенностей графика (наперед не известных). Теперь же мы в состоянии с помощью указанных выше методов установить некоторое число «опорных» точек, характерных именно для данного графика. Мы имеем здесь в виду, прежде всего, «поворотные точки» графика, т. е. вершины его горбов и впадин, отвечающие экстремальным значениям функции. Впрочем, к ним надлежит присоединить все вообще точки, где касательная горизонтальна или вертикальна, даже если они не отвечают экстремумам функции.

Мы ограничимся рассмотрением функций $y = f(x)$, принадлежащих к указанному в п°**113** классу. Тогда для построения графика такой функции $y = f(x)$ надлежит выполнить следующее:

1) определить значения x, для которых производная $y' = f'(x)$ равна нулю или бесконечности (или, по крайней мере, существуют бесконечные односторонние производные), и подвергнуть их исследованию на экстремум;

2) вычислить значения самой функции $y = f(x)$, отвечающие всем этим значениям x, а также концам a, b рассматриваемого промежутка.

Результаты удобно расположить в виде таблицы (см. ниже примеры) с непременным указанием особенности вычисленной точки графика: *максимум, минимум, перегиб*, $y' = 0$, $y' = +\infty$, $y' = -\infty$ и, наконец, $y' = \pm\infty$ или $y' = \mp\infty$ (так мы условно обозначаем случай, когда существуют бесконечные односторонние производные разных знаков). К названным точкам графика при желании присоединяют еще некоторые другие, например точки пересечения графика с осями.

После нанесения на чертеж всех найденных точек (число которых обычно невелико), через них проводят самый график, учитывая при этом все упомянутые их особенности. Следует помнить, что в промежутках между ними, как разъяснено в п°113, производная сохраняет знак, и график идет все время вверх или все время вниз.

Вычисления и проведение кривой упрощаются, если функция не изменяет своего значения при изменении знака x (четная функция), так что график симметричен относительно вертикальной оси. Аналогичную услугу может оказать и симметрия относительно начала координат, которая аналитически выражается в том, что функция при изменении знака x также лишь меняет знак (нечетная функция).

Построенный подобным образом график — не претендуя на точность отдельных ординат — уже довольно полно отображает ход изменения функции (что и было нашей целью), точно отмечая промежутки ее возрастания и убывания, а также точки, где скорость изменения функции падает до нуля или возрастает до бесконечности.

116. Примеры. 1) Найти экстремумы функции

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$$

и построить ее график.

Ввиду того, что функция имеет период 2π, достаточно ограничиться промежутком $[0, 2\pi]$ изменения x. Производная

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 3\sin x \cdot \cos^2 x = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x).$$

Корни производной (стационарные точки) в этом случае будут:

$$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ (2\pi).$$

При переходе через $x = 0$ множитель $\sin x$ меняет знак минус на плюс, а вся производная меняет знак плюс на минус, ибо последние два множителя сохраняют вблизи $x = 0$ знак минус; налицо максимум. Множитель $\sin x - \cos x$, обращающийся в нуль при $x = \frac{\pi}{4}$, при переходе через эту

точку меняет знак минус на плюс. То же будет и с производной, так как первые два множителя положительны; следовательно, здесь будет минимум. Аналогично исследуются и остальные стационарные точки: все они поочередно доставляют функции максимумы и минимумы.

Вместо исследования перемены знака первой производной можно было бы вычислить вторую производную

$$f''(x) = 3(\sin x + \cos x)(3\sin x \cos x - 1)$$

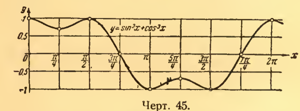
и в нее попросту подставить испытуемые значения x. Например, при $x = 0$ получим $f''(0) = -3$, что отвечает максимуму; при $x = \frac{\pi}{4}$ имеем $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, значит — минимум, и т. д.

Определим еще абсциссы точек пересечения графика с осью x, т. е. решим уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$, откуда $\cos x = -\sin x$, так что $x = \frac{3\pi}{4}$ или $\frac{7\pi}{4}$.

Вычислим теперь значения функции, отвечающие найденным значениям x, и составим таблицу:

$x=$	0 $(2\pi=6{,}28)$	$\frac{\pi}{4}=0{,}78$	$\frac{\pi}{2}=1{,}57$	$\frac{3\pi}{4}=2{,}36$	$\pi=3{,}14$	$\frac{5\pi}{4}=3{,}94$	$\frac{3\pi}{2}=4{,}71$	$\frac{7\pi}{4}=5{,}50$
$y=$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}71$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-0{,}71$	-1	0
	$y'=0$ *макс.*	$y'=0$ *мин.*	$y'=0$ *макс.*		$y'=0$ *мин.*	$y'=0$ *макс.*	$y'=0$ *мин.*	

По этой таблице и построен график, изображенный на черт. 45.



Черт. 45.

2) Найти экстремумы и построить график функции

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}.$$

На этот раз конечная производная

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3}\,\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot (x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

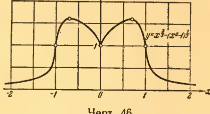
существует везде, исключая точки $x = 0$ и $x = \pm 1$. При приближении к ним как слева, так и справа производная имеет бесконечные пределы, значит, в этих точках обе односторонние производные бесконечны [103].

Для определения корней производной приравниваем нулю ее числитель; мы найдем: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Итак, «подозрительными» по экстремуму будут точки:

$$-1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 1.$$

Впрочем, ввиду четности функции (и, следовательно, симметрии ее графика относительно оси y), достаточно ограничиться правой полуплоскостью, т. е. значениями $x \geqslant 0$.

При $x = 0$ (и вблизи этой точки) числитель и второй множитель знаменателя имеют знак плюс. Множитель же $x^{\frac{1}{3}}$ знаменателя меняет знак минус на плюс, производная — тоже: минимум. При $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (и вблизи) знаменатель сохраняет знак плюс. Числитель же, имея в виду значения x, близкие к $\frac{1}{\sqrt{2}}$, перепишем так: $(1 - x^2)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$; он обращается в нуль при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, с уменьшением x — увеличивается, а с увеличением — уменьшается, так что меняет знак плюс на минус, и налицо максимум. При переходе через $x = 1$ множитель $(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$ в знаменателе, который обращается в этой точке в нуль, не меняет знака; это же справедливо и для производной, так что при $x = 1$ экстремума нет.



Черт. 46.

Хотя рассматриваемая функция определена и непрерывна во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$, но построение графика, разумеется, может быть осуществлено лишь в конечном промежутке. Впрочем, можно охарактеризовать и поведение функции «на бесконечности», переписав ее так:

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} + (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}},$$

видим, что $f(x) > 0$ и стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Таким образом, график функции расположен над осью x, но по мере удаления в бесконечность как налево, так и направо приближается к совпадению с этой осью.

Таблица:

$x=$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}71$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$	1	$+\infty$
$y=$	0	1	$\sqrt[3]{4} = 1{,}59$	1	$\sqrt[3]{4} = 1{,}59$	1	0
		$y' = +\infty$	$y' = 0$ *макс.*	$y' = \pm\infty$ *мин.*	$y' = 0$ *макс.*	$y' = -\infty$	

График изображен на черт. 46.

117. Использование высших производных. Мы видели, что если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то функция $f(x)$ достигает в точке x_0 минимума; если же $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то функция имеет в этой точке максимум. Случай, когда и $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0$, был оставлен нами неисследованным.

Предположим теперь, что в окрестности точки $x=x_0$ функция $f(x)$ имеет n последовательных производных, и n-я производная в точке $x=x_0$ непрерывна. Пусть все они, вплоть до $(n-1)$-й, в этой точке обращаются в нуль:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

между тем как $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Разложим приращение $f(x)-f(x_0)$ функции $f(x)$ по степеням разности $x-x_0$ по формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано [n°**107**, (17)]. Так как все производные порядков меньших, чем n, равны в точке x_0 нулю, то

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Вследствие того, что $\alpha\to 0$ при $x\to x_0$, при достаточной близости x к x_0 знак суммы в числителе будет совпадать со знаком $f^{(n)}(x_0)$ как для $x<x_0$, так и для $x>x_0$. Рассмотрим два случая.

1°. *n есть нечетное число*: $n=2k+1$. При переходе от значений x, меньших чем x_0, к значениям, бо́льшим чем x_0, выражение $(x-x_0)^{2k+1}$ изменит знак на обратный, а так как знак первого множителя при этом не меняется, то и знак разности $f(x)-f(x_0)$ изменится. Таким образом, в точке x_0 функция $f(x)$ не может иметь экстремума, ибо вблизи этой точки принимает значения как меньшие, так и бо́льшие, чем $f(x_0)$.

2°. *n есть четное число*: $n=2k$. В этом случае разность $f(x)-f(x_0)$ не меняет знака при переходе от x, меньших чем x^0, к большим, так как $(x-x_0)^{2k}>0$ при всех x. Очевидно, вблизи x_0 как слева, так и справа знак разности $f(x)-f(x_0)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(x_0)$. Значит, если $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x)>f(x_0)$ вблизи точки x_0, и в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум; если же $f^{(n)}(x_0)<0$, то функция имеет максимум.

Отсюда получаем такое правило:

Если из производных, не обращающихся в точке x_0 в нуль, первой оказывается производная нечетного порядка, то функция не имеет в точке x_0 ни максимума, ни минимума. Если такой производной является производная четного порядка, функция в точке x_0 имеет максимум или минимум, смотря по тому, будет ли эта производная отрицательна или положительна *).

---

*) Это правило в 1742 г. указал Коллин Маклорен в своем «Трактате о флюксиях».

Например, для функции $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ точка $x = 0$ является стационарной, так как в этой точке обращается в нуль производная

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x.$$

Далее:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \qquad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \qquad f'''(0) = 0;$$

$$f''''(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \qquad f''''(0) = 4.$$

Так как первой в нуль не обратилась производная *четного* порядка, то налицо экстремум, а именно минимум, ибо $f''''(0) > 0$.

§ 2. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

118. Разыскание наибольших и наименьших значений. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в конечном замкнутом промежутке $[a, b]$. До сих пор мы интересовались лишь ее максимумами и минимумами, теперь же поставим вопрос о разыскании *наибольшего* и *наименьшего* из всех значений, которые она принимает в этом промежутке*); по известному свойству непрерывных функций [73], такие наибольшее и наименьшее значения существуют. Остановимся для определенности на наибольшем значении.

Если оно достигается в некоторой точке *между* a и b, то это одновременно будет одним из максимумов (очевидно, наибольшим); но наибольшее значение может достигаться и на одном из концов промежутка, a или b (черт. 47). Таким образом, нужно сравнить между собой все максимумы функции $f(x)$ и ее *граничные значения* $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее из этих чисел и будет наибольшим из всех значений функции $f(x)$ в $[a, b]$. Аналогично разыскивается и наименьшее значение функции.

Черт. 47.

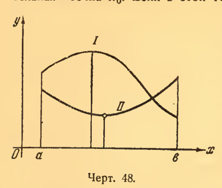
Если желают избежать исследования на максимум или минимум, то можно поступить иначе. Нужно лишь вычислить значения функции во всех «подозрительных» по экстремуму точках и сравнить их с граничными значениями $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее и наименьшее из этих чисел, очевидно, и будут наибольшим и наименьшим из всех значений функции.

---

*) Таким образом, мы сохраняем за термином «максимум» его «локальный» смысл (наибольшее значение в непосредственной окрестности соответствующей точки) и отличаем его от *наибольшего значения* функции во всем рассматриваемом промежутке.

То же относится к *минимуму* и *наименьшему значению* функции.

Замечание. В прикладных задачах чаще всего встречается простой случай, когда между a и b оказывается лишь одна «подозрительная» точка x_0. Если в этой точке функция имеет максимум (минимум), то без сравнения с граничными значениями ясно, что это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции в промежутке (черт. 48). Часто в подобных случаях оказывается более простым произвести исследование на максимум и минимум, чем вычислять и сравнивать частные значения функции (особенно, если в состав ее выражения входят буквенные постоянные).



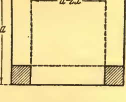
Черт. 48.

Важно подчеркнуть, что сказанное приложимо в полной мере и к открытому промежутку (a, b), а также к бесконечному промежутку.

119. Задачи. Изложим теперь несколько задач из разных областей, решение которых приводится именно к разысканию наибольшего или наименьшего значения функции. Впрочем, чаще всего интерес представляют не столько сами эти значения, сколько те точки (те значения аргумента), которые доставляют их функции.

1) Из квадратного листа жести со стороною a, вырезая по углам равные квадраты и сгибая края (черт. 49), составляют прямоугольную открытую коробку. Как получить коробку наибольшей вместимости?

Если сторону вырезаемого квадрата обозначить через x, то объем y коробки выразится так: $y = x(a-2x)^2$, причем x изменяется в промежутке $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Вопрос привелся к нахождению наибольшего значения функции y в этом промежутке.



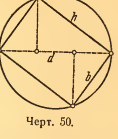
Черт. 49.

Так как производная $y' = (a-2x)(a-6x)$ между 0 и $\frac{a}{2}$ имеет единственный корень $x = \frac{a}{6}$, то, убедившись в том, что это значение доставляет функции максимум, одновременно получаем и искомое наибольшее значение. Или иначе: при $x = \frac{a}{6}$ имеем $y = \frac{2a^3}{27}$, в то время как граничные значения y равны нулю; следовательно, при $x = \frac{a}{6}$, действительно, получается наибольшее значение для y.

2) Дано бревно с круглым сечением диаметра d. Требуется обтесать его так, чтобы получилась балка с прямоугольным сечением наибольшей прочности.

Указание. В теории сопротивления материалов устанавливается, что прочность прямоугольной балки пропорциональна произведению bh^2, где b — основание прямоугольника в сечении балки, а h — его высота.

Так как $h^2 = d^2 - b^2$, то речь идет о наибольшем значении для выражения $y = bh^2 = b(d^2 - b^2)$, причем «независимая переменная» b изменяется в промежутке $(0, d)$.



Черт. 50.

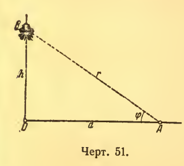
Производная $y' = d^2 - 3b^2$ обращается в нуль лишь однажды внутри этого промежутка, в точке $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Вторая производная $y'' = -6b < 0$, следовательно, в названной точке достигается максимум, а с ним и наибольшее значение.

При $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ будет $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, так что $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$. Из черт. 50 видно, как построить требуемый прямоугольник (диаметр разделен на три равные части, в точках деления восставлены перпендикуляры).

3) Пусть электрическая лампочка может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB (черт. 51). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости OA ее следует поместить, чтобы в точке A этой плоскости получить наибольшую освещенность?

Указание. Освещенность J пропорциональна $\sin\varphi$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния $r = AB$, т. е.

$$J = c \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2},$$



Черт. 51.

где c зависит от силы света лампочки.

Если за независимую переменную выбрать $h = OB$, то

$$\sin\varphi = \frac{h}{r}, \quad r = \sqrt{h^2 + a^2}$$

и $J = c \cdot \frac{h}{(h^2 + a^2)^{3/2}}$ $\quad (0 < h < +\infty)$.

Далее, производная

$$J'_h = c \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{5/2}}$$

обращается в нуль при $h = \frac{a}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}7\, a$, меняя знак при переходе через это значение с плюса на минус. Это и есть наивыгоднейшее расстояние.

Замечание. Пользуемся случаем обратить внимание читателя на следующее обстоятельство. При разыскании наибольшего или наименьшего значения функции для определенного промежутка изменения аргумента легко может оказаться, что внутри этого промежутка вовсе нет корней производной или других «подозрительных» значений. Это свидетельствует о том, что в рассматриваемом промежутке функция оказывается монотонно возрастающей или убывающей и, следовательно, достигает как наибольшего, так и наименьшего своего значения на концах промежутка.

§ 3. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

120. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Используем теперь понятие производной для раскрытия неопределенностей всех типов. Сначала мы займемся основным случаем — неопределенностью типа $\frac{0}{0}$, т. е. исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к нулю (например, при $x \to a$). Приводимая ниже теорема в основном принадлежит Иоганну Бернулли. Содержащееся в ней правило, однако, обычно называют «правилом Лопиталя», так как оно впервые (хотя и не совсем в таком виде) было опубликовано именно в книге Лопиталя*) «Анализ бесконечно малых», вышедшей в свет в 1696 г.

Теорема 1. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $(a, b]$, 2) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, 3) *существуют в промежутке* $(a, b]$ *конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *причем* $g'(x) \neq 0$, *и, наконец,* 4) *существует* (*конечный или нет*) *предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Дополним определение функций $f(x)$ и $g(x)$, положив их при $x = a$ равными нулю: $f(a) = g(a) = 0$ **). Тогда эти функции окажутся непрерывными во всем замкнутом промежутке $[a, b]$: их значения в точке a совпадают с пределами при $x \to a$ [ввиду 2)], а в прочих точках непрерывность вытекает из существования конечных производных [см. 3)]. Применяя теорему Коши [n° **104**], получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $a < c < x$. То обстоятельство, что $g(x) \neq 0$, т. е. $g(x) \neq g(a)$, есть следствие предположения: $g'(x) \neq 0$, как это было установлено при выводе формулы Коши.

---

*) Гильом Франсуа де Лопиталь (1661—1704) — французский математик. Упомянутая в тексте книга является первым печатным курсом дифференциального исчисления.

**) Конечно, можно было бы просто предположить заранее функции определенными и непрерывными при $x = a$; но в приложениях иной раз удобнее формулировка условий теоремы, данная в тексте (см., например, теорему 1*).

Когда $x \to a$, очевидно, и $c \to a$, так что, в силу 4),

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказанная теорема сводит предел отношения функций к пределу отношения производных, если последний существует. Часто оказывается, что нахождение предела отношения производных проще и может быть осуществлено элементарными приемами.

Заметим, что мы лишь для определенности рассмотрели случай, когда a является левым концом промежутка, и переменная x стремится к a справа. Можно было бы считать, что a служит правым концом, и x стремится к нему слева. Наконец, допустим и двухсторонний предельный переход.

Примеры. 1) Найти предел

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}\ {}^{*)}.$$

По правилу Лопиталя, он равен пределу

$$\lim_{x \to a} \frac{\dfrac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\dfrac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}} = \frac{16}{9}a.$$

Окончательный результат здесь получается из отношения производных простой подстановкой $x = a$ ввиду непрерывности этого отношения в указанной точке.

2) Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

Отношение производных последовательно упрощается:

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x};$$

при $x \to 0$, оно, очевидно, стремится к двум. Таков же будет, согласно теореме, и искомый предел.

Обращаем внимание читателя на то, что здесь и отношение производных снова представило неопределенность вида $\frac{0}{0}$, но раскрыть эту неопределенность оказалось возможным путем элементарных преобразований. В других случаях может понадобиться применить теорему повторно. Важно подчеркнуть, что при этом допустимы всякие упрощения получаемых выражений, сокращение общих множителей, использование уже известных пределов и т. п.

---

*) Это и есть первый пример на раскрытие неопределенностей, приведенный в книге Лопиталя.

Теорема 1 легко распространяется на случай, когда аргумент x стремится к бесконечному пределу: $a = \pm\infty$. Именно, имеет место, например,

Теорема 1*. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $[c, +\infty)$, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 3) *существуют в промежутке* $[c, +\infty)$ *конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *причем* $g'(x) \neq 0$, *и, наконец*, 4) *существует (конечный или нет) предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Преобразуем переменную x по формуле $x = \frac{1}{t}$, $t = \frac{1}{x}$. Тогда, если $x \to +\infty$, то $t \to +0$, и обратно. Ввиду 2), имеем

$$\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

а в силу 4),

$$\lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K.$$

К функциям $f\left(\frac{1}{t}\right)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$ от новой переменной t можно применить теорему 1, что даст нам

$$\lim_{t\to+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = K \text{ *)},$$

а тогда и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K,$$

что и требовалось доказать.

121. Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Обратимся к рассмотрению неопределенных выражений вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к беско-

---

*) Функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ мы дифференцируем по t как сложные функции.

нечности (при $x \to a$). Покажем, что в этом случае применимо то же правило Лопиталя; следующая теорема есть простая перефразировка теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть*: 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $(a, b]$, 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, 3) *существуют в промежутке* $(a, b]$ *конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *причем* $g'(x) \neq 0$, *и, наконец,* 4) *существует (конечный или нет) предел*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Ввиду 2), можно считать, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ для всех значений x.

Рассмотрим сначала случай конечного K. Если задаться произвольным числом $\varepsilon > 0$, то, в силу условия 4), найдется такое $\eta > 0$ $(\eta \leqslant b - a)$, что при $a < x < a + \eta$ будет

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим для краткости $a + \eta = x_0$ и возьмем x между a и x_0. К промежутку $[x, x_0]$ применим формулу Коши *):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $x < c < x_0$, следовательно,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Напишем теперь тождество (которое проверяется непосредственно):

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right] \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right].$$

Так как $g(x) \to \infty$ при $x \to a$, то найдется такое $\delta > 0$ (можно считать $\delta \leqslant \eta$), что для $a < x < a + \delta$

$$g(x) > g(x_0) \quad \text{и} \quad \left| \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

*) В этом — существенное отличие от доказательства теоремы 1: здесь нельзя применить формулу Коши к промежутку $[a, x]$, ибо, как бы ни определять функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, ввиду 2) из них не получить функций, непрерывных в этой точке.

При указанных значениях x будем иметь тогда [см. (1)]

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Пусть теперь $K = \infty$ (случай $K = -\infty$ при предположениях 2) невозможен); тогда $f'(x) \neq 0$, по крайней мере, для значений x, достаточно близких к a. Обменяв ролями функции f и g, будем иметь

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0,$$

так что, по доказанному,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

откуда, наконец, в связи со сделанными вначале замечаниями,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

В тексте теоремы 2 можно было бы считать и $a = -\infty$ без существенных изменений в доказательстве. Если бы a было правым концом рассматриваемого промежутка, то, в частности, можно было бы считать $a = +\infty$. Таким образом, случай $a = \pm\infty$ охвачен по существу уже теоремой 2.

Примеры.

3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\mu}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\mu x^{\mu}} = 0 \quad (\text{если } \mu > 0),$$

4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\mu}}{a^{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x} \cdot \ln a} \qquad (a > 1,\ \mu > 0).$$

Если $\mu > 1$, то справа снова имеем неопределенность того же типа $\frac{\infty}{\infty}$; но, продолжая этот процесс и повторно применяя теорему 2, в конце концов получим в числителе степень с отрицательным (или нулевым) показателем. Поэтому, во всяком случае,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\mu}}{a^{x}} = 0.$$

122. Другие виды неопределенностей. Предыдущие теоремы относились к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Если имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$, то ее можно привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и тогда воспользоваться правилом Лопиталя. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

причем $f(x)$ не меняет знака. Тогда имеем

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Вторoe из этих выражений представляет при $x\to a$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$, третье — неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5)

$$\lim_{x\to+0}(x^{\mu}\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0$$

(мы считаем $\mu>0$).

К виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ всегда можно привести и неопределенности вида $\infty-\infty$. Пусть имеем выражение $f(x)-g(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

Тогда можно произвести, например, следующее преобразование, сводящее это выражение к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

Часто, впрочем, того же удается достигнуть проще.

Пример 6)

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x},$$

но

$$\frac{x^2\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x};$$

предел первого множителя находится элементарно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

а ко второму применяем теорему 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot\sin x}{\sin^2 x+2x\cdot\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}.$$

Таким образом, искомый предел равен $-\frac{2}{3}$.

В случае неопределенных выражений вида 1^∞, 0^0, ∞^0, рекомендуется эти выражения предварительно прологарифмировать.

Пусть $y=[f(x)]^{g(x)}$; тогда $\ln y = g(x)\cdot\ln f(x)$. Предел $\ln y$ представляет собой неопределенность уже изученного типа $0\cdot\infty$. Допустим, что одним из указанных выше приемов удается найти $\lim\limits_{x\to a}\ln y$, который оказывается равным конечному числу k, $+\infty$ или $-\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} y$, соответственно, будет e^k, $+\infty$ или 0.

Пример 7) Пусть

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

Требуется найти $\lim y$ при $x\to 0$ (неопределенность вида 1^∞).

Если считать $x>0$ (этим предположением, ввиду четности функции y, можно ограничиться), то

$$\ln y=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}.$$

Воспользуемся теоремой 1:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}.$$

Но мы только что видели, что этот предел равен $-\frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} y=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Замечание. Неопределенные выражения вида $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ встречаются у Эйлера; показательные же виды неопределенностей ввел в рассмотрение Коши. Однако ни тот, ни другой не дали строгого доказательства для случая $\frac{\infty}{\infty}$!

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

123. Функциональная зависимость между переменными. Примеры. До сих пор мы изучали совместное изменение двух переменных, из которых одна *зависела* от другой: значением *независимой* переменной уже вполне определялось значение *зависимой* переменной, или *функции*. Нередки, однако, случаи, когда *независимых переменных* оказывается несколько, и для определения значения функции необходимо предварительно установить значения, *совместно* принимаемые всеми этими независимыми переменными.

1) Так, например, объем V кругового цилиндра есть *функция* от радиуса R его основания и от высоты H; зависимость между этими переменными выражается формулой

$$V = \pi R^2 H,$$

которая дает возможность, зная значения *независимых* переменных R и H, установить соответствующее значение V.

2) Пусть температура массы газа, находящегося под поршнем цилиндра, не постоянна; тогда объем V и давление p этой массы газа связаны с ее (абсолютной) температурой T так называемой формулой Клапейрона:

$$pV = RT \quad (R = \text{const}).$$

Отсюда, считая, например, V и T *независимыми* переменными, *функцию* p можно выразить через них так:

$$p = \frac{RT}{V}.$$

3) Изучая физическое состояние какого-нибудь тела, часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы: плотность, температура, электрический потенциал и т. п. Все эти величины суть «функции точки» или, если угодно, функции от координат x, y, z точки. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется еще и время t. В этом случае мы имеем дело с функциями от четырех независимых переменных.

Число подобных примеров читатель и сам может произвольно увеличить.

Уточнение понятия функции в случае нескольких независимых переменных начнем с простейшего случая, когда этих переменных две.

124. Функции двух переменных и области их определения. Говоря об изменении двух независимых переменных x и y, мы должны всякий раз указывать, какие пары значений (x, y) они могут принимать совместно; множество $\mathcal{M}$ этих пар и будет областью изменения переменных x, y.

Самое определение понятия функции дается в тех же выражениях, что и для случая одной независимой переменной:

Переменная z (с областью изменения $\mathcal{Z}$) называется функцией независимых переменных x, y в множестве $\mathcal{M}$, если каждой паре (x, y) их значений из $\mathcal{M}$ — по некоторому правилу или закону — ставится в соответствие одно определенное значение z (из $\mathcal{Z}$).

Здесь имеется в виду однозначная функция; легко распространить это определение и на случай многозначной функции.

Множество $\mathcal{M}$, о котором выше шла речь, и есть область определения функции. Сами переменные x, y — по отношению к их функции z — называются ее аргументами. Функциональная зависимость между z и x, y обозначается, аналогично случаю одной независимой переменной, так:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y) \quad \text{и т. п.}$$

Если пара (x_0, y_0) взята из $\mathcal{M}$, то $f(x_0, y_0)$ означает то частное (числовое) значение функции $f(x, y)$, которое она принимает, когда $x = x_0$, $y = y_0$.

Приведем несколько примеров функций, заданных аналитически — формулами, с указанием их областей определения. Формула

$$1) \; z = x^2 + y^2$$

определяет функцию для всех пар (x, y) без исключения. Формулы

$$2) \; z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad 3) \; z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

годятся (если мы хотим иметь дело с конечными вещественными значениями z) лишь для тех пар (x, y), которые удовлетворяют, соответственно, неравенству

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Формулой

$$4) \; z = \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b}$$

функция определена для тех значений x и y, которые порознь удовлетворяют неравенствам

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b.$$

Во всех этих случаях мы указывали наиболее широкую — естественную [n° 18, 2°] — область применения формулы.

Рассмотрим теперь такой пример.

5) Пусть стороны треугольника произвольно изменяются, с тем лишь ограничением, что периметр его сохраняет постоянную величину $2p$. Если

две стороны его обозначить через x и y, то третья сторона будет $2p - x - y$, так что треугольник вполне определяется сторонами x и y. Как зависит от них площадь z треугольника?

По известной формуле эта площадь выразится так:

$$z = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

Что же касается области определения $\mathcal{M}$ этой функции, то она обусловливается, на этот раз, тем конкретным вопросом, который привел к рассмотрению функции. Так как длина каждой стороны треугольника есть положительное число, меньшее полупериметра, то должны выполняться неравенства

$$0 < x < p, \quad 0 < y < p, \quad x + y > p;$$

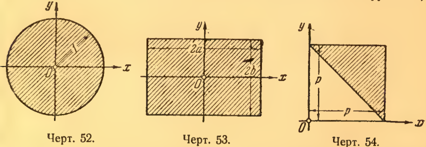
они характеризуют область $\mathcal{M}$, несмотря на то, что полученное аналитическое выражение само по себе сохраняет смысл и в более широкой области, например, для $x > p$ и $y > p$.

Таким образом, в то время как для функции одной переменной стандартной областью изменения аргумента являлся (конечный или бесконечный) промежуток, в случае функции двух переменных мы уже сталкиваемся с большим разнообразием и сложностью возможных (и естественных) областей изменения аргументов.

Рассмотрение этих областей значительно облегчается их геометрической интерпретацией. Если взять на плоскости две взаимно перпендикулярные оси и обычным образом откладывать на них значения x и y, то, как известно, каждой парой (x, y) однозначно определяется точка на плоскости, имеющая эти значения своими координатами, и обратно.

Тогда для характеристики тех пар (x, y), для которых определена функция, проще всего указать, какая фигура на плоскости xy заполняется соответствующими точками.

Так, говорят, что функция 1) определена во всей плоскости, функции 2) и 3) — в круге, соответственно, замкнутом (т. е. включающем окружность)



Черт. 52. Черт. 53. Черт. 54.

или открытом (без окружности; черт. 52); функция 4) определена в прямоугольнике (черт. 53); наконец, функция 5) рассматривается в открытом треугольнике (черт. 54).

Эта геометрическая интерпретация настолько удобна, что обычно самые пары чисел (x, y) называют «точками», а множество таких «точек»,

отвечающее тем или иным геометрическим образам, называют по имени этих образов. Так, множество «точек» или пар (x, y), для которых выполняются неравенства

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

есть «прямоугольник», измерения которого равны $b-a$ и $d-c$; его мы будем обозначать символом $[a, b; c, d]$, сходным с обозначением промежутка. Множество «точек» или пар (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqslant r^2,$$

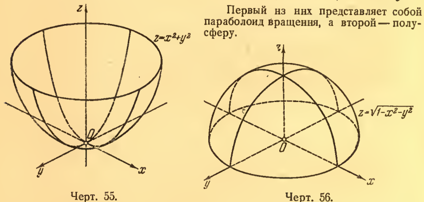
есть «круг» радиуса r, с центром в «точке» (α, β), и т. п.

Наподобие того, как функция $y=f(x)$ геометрически иллюстрировалась своим графиком [n° 19], можно геометрически истолковать и уравнение $z=f(x, y)$. Возьмем в пространстве прямоугольную систему координатных осей x, y, z; изобразим на плоскости xy область $\mathcal{M}$ изменения переменных x и y, наконец, в каждой точке $M(x, y)$ этой области восставим перпендикуляр к плоскости xy и отложим на нем значение $z=f(x, y)$. Геометрическое место полученных таким образом точек и явится своего рода пространственным графиком нашей функции. Это будет, вообще говоря, некоторая поверхность; в свою очередь, равенство $z=f(x, y)$ называется уравнением поверхности.

Для примера на черт. 55 и 56 изображены геометрические образы функций:

$$z=x^2+y^2 \quad \text{и} \quad z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Первый из них представляет собой параболоид вращения, а второй — полусферу.



Черт. 55. Черт. 56.

125. Арифметическое m-мерное пространство. Переходя к функциям от m независимых переменных (при $m \geqslant 3$), мы сначала остановимся на системах совместных значений этих переменных.

В случае $m=3$ такая система из трех чисел (x, y, z), как ясно читателю, еще может быть геометрически истолкована как точка пространства, а множество таких троек — как часть пространства

или геометрическое тело. Но при $m > 3$ возможности непосредственной геометрической интерпретации уже нет.

Тем не менее, желая распространить геометрические методы (оказавшиеся плодотворными для функций двух и трех переменных) и на теорию функций бо́льшего числа переменных, в анализе вводят понятие m-мерного «пространства» и при $m > 3$.

Назовем m-мерной «точкой» систему из m вещественных чисел: $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$*); сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются координатами этой «точки» M. Множество всех мыслимых m-мерных «точек» составляет m-мерное «пространство», которое иногда называют арифметическим.

Самые понятия «m-мерной точки» и «m-мерного (арифметического) пространства» восходят к Риману**), но терминология принадлежит Кантору.

Целесообразно ввести понятие «расстояния» $\overline{MM'}$ между двумя m-мерными «точками»:

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{и} \quad M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m).$$

Подражая известной из аналитической геометрии формуле, полагают

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x'_i - x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_m - x_m)^2}; \tag{1}$$

при $m = 2$ или 3 это «расстояние» совпадает с обычным расстоянием между двумя соответственными геометрическими точками.

Если взять еще одну точку

$$M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_m),$$

то, как можно доказать, для «расстояний» $\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ и $\overline{MM''}$ выполняется неравенство

$$\overline{MM''} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M''}, \tag{2}$$

напоминающее известную теорему геометрии: «сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон».

---

*) Имея дело с неопределенным числом переменных, представляется удобным обозначать их не различными буквами, но одной и той же буквой лишь с различными номерами. Таким образом, x_i означает (вразрез с прежней практикой) не i-е значение некоей переменной, а самое i-ю переменную, которая сама по себе принимает различные значения.

**) Бернгард Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик.

Действительно, для любого набора вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ имеет место неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}\ ^{*)}.$$

Если положить здесь

$$a_i = x_i' - x_i, \quad b_i = x_i'' - x_i', \text{ так что } a_i + b_i = x_i'' - x_i,$$

то получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i''-x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i'-x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i''-x_i')^2},$$

что равносильно (2). Таким образом, это существенное свойство расстояния оказывается налицо и в нашем «пространстве».

В m-мерном «пространстве» можно рассматривать и «прямые». Читатель вспомнит, что на плоскости x_1x_2 прямая определялась уравнением $\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1} = \frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}$, а в пространстве $x_1x_2x_3$ — уравнениями $\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1} = \frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2} = \frac{x_3-\beta_3}{\alpha_3}$ (коэффициенты α здесь не могут обращаться одновременно в нуль). По аналогии с этим, назовем «прямой» в m-мерном «пространстве» множество «точек» $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1} = \frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_m-\beta_m}{\alpha_m}$$

---

*) Если возвести обе части его в квадрат и опустить в обеих частях равные члены, то это неравенство сведется к известному неравенству Коши:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}.$$

Покажем попутно, как это последнее может быть установлено элементарно. Квадратный трехчлен

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i x + b_i)^2 = x^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i^2 + 2x \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i b_i + \sum_{i=1}^{m} b_i^2$$

не принимает отрицательных значений. В таком случае он не может иметь различных вещественных корней, и

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i^2 - \left\{\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right\}^2 \geqslant 0,$$

что равносильно неравенству Коши.

(при прежнем условии относительно α). Если обозначить общее значение этих отношений через t, то можно определить «прямую» и параметрическими уравнениями:

$$x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 t + \beta_2, \quad \ldots, \quad x_m = \alpha_m t + \beta_m,$$

предполагая параметр t изменяющимся от $-\infty$ до $+\infty$. Будем считать «точки» ее следующими одна за другой в порядке возрастания параметра; если $t' < t < t''$, то из соответствующих «точек» M', M, M'' именно «точка» M лежит между двумя другими, так как следует за M' и предшествует M''. При этих условиях, как легко показать, расстояния между ними удовлетворяют соотношению

$$\overline{M'M''} = \overline{M'M} + \overline{MM''},$$

что является характерным для прямой и в обычном пространстве.

Уравнения «прямой», проходящей через две заданные «точки»

$$M'(x'_1, \ldots, x'_m) \quad \text{и} \quad M''(x''_1, \ldots, x''_m),$$

очевидно, могут быть написаны в виде:

$$x_1 = x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \quad \ldots, \quad x_m = x'_m + t(x''_m - x'_m)$$
$$(-\infty < t < +\infty),$$

причем сами «точки» M' и M'' получаются отсюда при $t = 0$ и $t = 1$. Если же изменить t от нуля до единицы, то получится «прямолинейный отрезок» $M'M''$, соединяющий эти «точки».

Наконец, если имеется несколько примыкающих один к другому «отрезков» $M'M_1$, M_1M_2, ..., M_kM'', то из них составится «ломаная» в m-мерном «пространстве».

126. Примеры областей в m-мерном пространстве. Обратимся теперь к рассмотрению простейших «тел» или «областей» в m-мерном «пространстве».

1) Множество «точек» $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, координаты которых независимо одна от другой удовлетворяют неравенствам

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \quad \ldots, \quad a_m \leqslant x_m \leqslant b_m,$$

называется m-мерным «прямоугольным параллелепипедом» и обозначается так:

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m].$$

При $n = 2$ отсюда, в частности, получается тот «прямоугольник», о котором уже была речь в n°**124**; трехмерному «параллелепипеду» отвечает в пространстве обыкновенный прямоугольный параллелепипед.

Если в написанных соотношениях исключить равенство

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad \ldots, \quad a_m < x_m < b_m,$$

то этим определится открытый «прямоугольный параллелепипед»:

$$(a_1,\ b_1;\quad a_2,\ b_2;\ \ldots;\ a_m,\ b_m),$$

в отличие от которого рассмотренный выше называется замкнутым. Разности $b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ \ldots,\ b_m - a_m$ называют измерениями обоих параллелепипедов, а точку

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2},\ \ldots,\ \frac{a_m+b_m}{2}\right)$$

— их центром.

Окрестностью «точки» $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0)$ называется любой открытый «параллелепипед»:

$$(x_1^0 - \delta_1,\ x_1^0 + \delta_1;\ x_2^0 - \delta_2,\ x_2^0 + \delta_2;\ \ldots;\ x_m^0 - \delta_m,\ x_m^0 + \delta_m) \tag{3}$$

$(\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_m > 0)$ с центром в «точке» M_0; чаще всего это будет «куб»:

$$(x_1^0 - \delta,\ x_1^0 + \delta;\ x_2^0 - \delta,\ x_2^0 + \delta;\ \ldots;\ x_m^0 - \delta,\ x_m^0 + \delta)$$

$(\delta > 0)$, все измерения которого равны $(= 2\delta)$.

2) Рассмотрим множество «точек» $M(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$, удовлетворяющих неравенству

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2 \leqslant r^2 \quad (\text{или } < r^2),$$

где $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0)$ есть фиксированная «точка», а r — постоянное положительное число. Это множество называется замкнутой (или открытой) m-мерной «сферой» радиуса r, с центром в «точке» M_0. Иными словами, «сфера» есть множество точек M, «расстояние» которых от некоторой фиксированной «точки» M_0 не превосходит (или меньше) r. Само собой ясно, что этой «сфере» при $m = 2$ отвечает круг [ср. n° **124**], а при $m = 3$ — обыкновенная сфера.

Открытую «сферу» любого радиуса $r > 0$ с центром в «точке» $M_0(x_1^0,\ \ldots,\ x_m^0)$ можно также рассматривать как окрестность этой точки; в отличие от той «параллелепипедальной» окрестности, которую мы ввели раньше, эту окрестность будем называть «сферической».

Полезно раз навсегда дать себе отчет в том, что если «точка» M_0 окружена окрестностью одного из указанных двух типов, то ее можно окружить и окрестностью второго типа так, чтобы эта окрестность содержалась в первой.

Пусть сначала задан «параллелепипед» (3) с центром в «точке» M_0. Достаточно взять открытую «сферу» с тем же центром и радиусом r, меньшим всех $\delta_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, чтобы эта сфера уже содержалась в названном «параллелепипеде». Действительно, для любой

«точки» $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ этой «сферы» будем иметь (при каждом i):

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

или

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

так что эта точка принадлежит заданному «параллелепипеду».

Обратно, если задана «сфера» радиуса r с центром в M_0, то «параллелепипед» (3) в ней содержится, например, при $\delta_1 = \delta_2 = \ldots \ldots = \delta_m = \frac{r}{\sqrt{m}}$. Это следует из того, что любая «точка» $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ этого «параллелепипеда» отстоит от «точки» M_0 на «расстояние»

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\delta_k^2} = r$$

и, следовательно, принадлежит заданной «сфере».

127. Общее определение открытой и замкнутой областей. Назовем «точку» $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ в н у т р е н н е й «точкой» множества $\mathcal{M}$ в m-мерном «пространстве», если она принадлежит множеству $\mathcal{M}$ вместе с некоторой достаточно малой ее окрестностью. Из утверждения, доказанного в конце предыдущего номера, следует с очевидностью, что безразлично, какого типа окрестности здесь иметь в виду — «параллелепипедальные» или «сферические».

Для о т к р ы т о г о «прямоугольного параллелепипеда»

$$(a_1, b_1; \ldots; a_m, b_m) \tag{4}$$

каждая его «точка» является внутренней. Действительно, если

$$a_1 < x_1' < b_1, \ldots, a_m < x_m' < b_m,$$

то легко найти такое $\delta > 0$, чтобы было

$$a_1 < x_1' - \delta < x_1' + \delta < b_1, \ldots, a_m < x_m' - \delta < x_m' + \delta < b_m.$$

Аналогично, в случае о т к р ы т о й «сферы» радиуса r с центром в «точке» M_0, каждая принадлежащая ей точка M' также является для нее внутренней. Если взять ρ так, что

$$0 < \rho < r - \overline{M'M_0},$$

и описать вокруг M' «сферу» этим радиусом ρ, то она целиком будет содержаться в исходной «сфере»: лишь только $\overline{MM'} < \rho$, тотчас же [п° 125, (2)]

$$\overline{MM_0} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r,$$

так что «точка» M принадлежит исходной «сфере».

Подобного рода *множество, целиком состоящее из внутренних «точек», будем называть открытой «областью».*

Таким образом, открытый «прямоугольный параллелепипед» и открытая «сфера» служат примерами открытых «областей».

Обобщим теперь понятие точки сгущения [n° **32**] на случай множества $\mathfrak{M}$ в m-мерном «пространстве». *«Точка» M_0 называется «точкой сгущения» множества $\mathfrak{M}$, если в каждой ее окрестности* (и снова — безразлично, какого типа) *содержится хоть одна «точка» множества $\mathfrak{M}$, отличная от M_0.*

«Точки сгущения» для открытой «области», не принадлежащие ей, называются пограничными «точками» этой «области». Пограничные «точки» в их совокупности образуют «границу области». *Открытая «область» вместе с «границей» ее называется замкнутой «областью».*

Нетрудно видеть, что для открытого параллелепипеда (4) пограничными будут «точки» $M(x_1, \ldots, x_m)$, для которых

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ \ldots, \ a_m \leqslant x_m \leqslant b_m,$$

причем хоть в одном случае имеет место именно равенство.

Точно так же, для рассмотренной выше открытой «сферы» пограничными будут «точки» M, для которых в точности $\overline{MM_0} = r$.

Таким образом, замкнутый «прямоугольный параллелепипед» и замкнутая «сфера» дают примеры замкнутых «областей».

Впредь, говоря об «области», открытой или замкнутой, мы всегда будем иметь в виду «область» в указанном здесь специальном смысле.

Установим теперь, что *замкнутой «области» принадлежат уже все ее «точки сгущения».*

Пусть даны замкнутая «область» $\overline{\mathscr{D}}$ и «точка» M_0 вне ее. Докажем, что тогда M_0 не будет «точкой сгущения» для $\overline{\mathscr{D}}$.

Замкнутая «область» $\overline{\mathscr{D}}$ получается из некоторой открытой «области» $\mathscr{D}$ путем присоединения к ней ее «границы» $\mathscr{E}$. Очевидно, M_0 не является «точкой сгущения» для $\mathscr{D}$; следовательно, M_0 можно окружить такой открытой «сферой», чтобы в ней вовсе не содержалось «точек» из $\mathscr{D}$. Но тогда в ней не может быть и «точек» из $\mathscr{E}$: ведь, если бы какая-нибудь «точка» M' из $\mathscr{E}$ в нее попала, то в ней содержалась бы целиком и некоторая окрестность «точки» M', и в этой окрестности не было бы ни одной точки из $\mathscr{D}$, вопреки определению «границы». Итак, в упомянутой «сфере» нет «точек» из $\overline{\mathscr{D}}$, что и доказывает наше утверждение.

Вообще «точечное» множество $\mathfrak{M}$, содержащее все свои «точки сгущения», называют замкнутым. Таким образом, замкнутая «область» есть частный случай замкнутого множества.

Все изложенное в последних номерах можно рассматривать как установление лишь некоего **геометрического языка***); с этим не связано (при $m > 3$) никаких **реальных** геометрических представлений. Однако полезно подчеркнуть, что на деле m-мерное (арифметическое) «пространство» является лишь первым шагом к тем в высшей степени плодотворным обобщениям понятия пространства, которые лежат в основе многих более высоких частей современного анализа.

128. Функции m переменных. Пусть имеем m переменных x_1, $x_2, \ldots, x_m$, совместные значения которых могут выбираться произвольно из некоторого множества $\mathcal{M}$ точек m-мерного пространства: эти переменные называются **независимыми**. Определение функции и все сказанное по этому поводу для случая двух независимых переменных [124] непосредственно переносится и на рассматриваемый случай, так что нет надобности на этом останавливаться.

Если точку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обозначить через M, то функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от этих переменных иногда называют **функцией точки** M и обозначают тем же знаком: $u = f(M)$.

Предположим теперь, что в некотором множестве $\mathcal{P}$ точек k-мерного пространства (где k не связано с m) заданы m функций от k переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k), \tag{5}$$

или, короче,

$$x_1 = \varphi_1(P), \ldots, x_m = \varphi_m(P), \tag{5a}$$

где P означает точку $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ k-мерного пространства. Допустим, сверх того, что, когда точка $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ изменяется в пределах множества $\mathcal{P}$, соответствующая ей m-мерная точка M, с координатами (5) или (5а), не выходит за пределы m-мерного множества $\mathcal{M}$, где определена функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(M)$.

Тогда переменную u можно рассматривать как **сложную функцию** от независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$ (в множестве $\mathcal{P}$) — **через посредство** переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k));$$

u является *функцией от функций* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. [Ср. n° 25.]

Самый процесс определения сложной функции по функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и функции f называется (как в простейшем случае функций одной переменной) *суперпозицией*.

---

*) Мы помещали в кавычках все геометрические термины, которые употреблялись в смысле, отличном от обычного: «точка», «расстояние», «область», и т. п. Впредь мы этого делать уже не будем.

Класс функций нескольких переменных, с которыми непосредственно приходится иметь дело на первых порах, очень невелик. По существу, он строится, с помощью суперпозиций, на элементарных функциях одной переменной [n° n° 22, 24] и на следующих функциях двух переменных:

$$z = x \pm y, \quad z = xy, \quad z = \frac{x}{y}, \quad z = x^y,$$

т. е. на четырех арифметических операциях и на так называемой степенно-показательной функции.

Арифметические операции, повторно примененные к независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и постоянным, приводят прежде всего к целым многочленам:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}, \ldots, x_m^{\nu_m} \text{*)} \quad (6)$$

(целая рациональная функция) и к частным двух таких многочленов:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{\sum C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}, \ldots, x_m^{\nu_m}}{\sum C'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}, \ldots, x_m^{\mu_m}} \quad (7)$$

(дробная рациональная функция).

Привлечение элементарных функций одной переменной приводит к таким, например, функциям:

$$f(x, y, z) = \frac{\ln(x + y + z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sin xy + \sin yz + \sin zt + \sin tx,$$

и т. п.

Те замечания, которые были сделаны в n° 18 по поводу аналитического задания функций одной переменной, могут быть повторены и здесь.

129. Предел функции нескольких переменных. Рассмотрим в m-мерном пространстве последовательность точек

$$\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (8)$$

Мы будем говорить, что эта последовательность сходится к предельной точке $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, если координаты точки M_n порознь стремятся к соответствующим координатам точки M_0, т. е. если при $n \to \infty$

$$x_1^{(n)} \to a_1, \quad x_2^{(n)} \to a_2, \quad \ldots, \quad x_m^{(n)} \to a_m. \quad (9)$$

*) Мы знаем, что знак $\sum$ означает сумму однотипных слагаемых. Здесь мы имеем более сложный случай, когда слагаемые зависят от нескольких значков.

Вместо этого можно было бы потребовать, чтобы расстояние между точками M_n и M_0 стремилось к нулю:

$$\overline{M_0M_n} \to 0. \tag{10}$$

Равносильность обоих определений вытекает из доказанного в n°126 утверждения об окрестностях двух типов. Действительно, условие (9) означает, что, каково бы ни было число $\delta > 0$, точка M_n при достаточно большом n удовлетворяет неравенствам

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \delta, \; \ldots, \; |x_m^{(n)} - a_m| < \delta,$$

т. е. содержится в открытом параллелепипеде

$$(a_1 - \delta, \; a_1 + \delta; \; \ldots; \; a_m - \delta, \; a_m + \delta)$$

с центром в точке M_0; требование же (10) имеет тот смысл, что, каково бы ни было число $r > 0$, точка M_n — снова при достаточно большом n — удовлетворяет неравенству

$$\overline{M_0M_n} < r,$$

т. е. попадает в открытую сферу радиуса r с центром в той же точке.

Пусть дано некоторое множество $\mathcal{M}$ в m-мерном пространстве, и точка $M_0(a_1, \ldots, a_m)$ является его **точкой сгущения**. Тогда из $\mathcal{M}$ всегда можно извлечь такую последовательность (8) отличных от M_0 точек, которая сходилась бы к M_0 как к предельной точке.

Предположим теперь, что в упомянутом множестве определена функция $f(x_1, \ldots, x_m)$. Аналогично случаю функции от одной переменной, говорят, что

*функция $f(x_1, \ldots, x_m) = f(M)$ имеет пределом число A **при стремлении переменных** $x_1, \ldots, x_m$, **соответственно**, **к** $a_1, \ldots, a_m$ (или — короче — при стремлении точки M к точке M_0), если, какую бы ни извлечь из $\mathcal{M}$ последовательность (8) отличных от $M_0(a_1, \ldots, a_m)$ точек, сходящуюся к M_0, числовая последовательность $\{f(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\} = \{f(M_n)\}$, состоящая из соответствующих значений функции, всегда сходится к A.*

Обозначают этот факт так:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \ldots, x_m),$$

или — короче —

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Определение предела функции легко распространить и на случай, когда некоторые из чисел $A, a_1, \ldots, a_m$ или все они — бесконечны.

Подчеркнем, что и для функции нескольких переменных понятие предела функции приводится, таким образом, к понятию предела последовательности.

Однако и здесь определение предела может быть дано «на языке ε-δ», без упоминания о последовательностях. Вот как выглядит это определение для случая конечности всех чисел $A, a_1, \ldots, a_m$:

говорят, что *функция* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *имеет пределом число* A *при стремлении переменных* $x_1, \ldots, x_m$, *соответственно, к* $a_1, \ldots, a_m$, *если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что*

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - A| < \varepsilon,$$

лишь только

$$|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, \quad |x_m - a_m| < \delta.$$

При этом точка $(x_1, \ldots, x_m)$ предполагается взятой из $\mathfrak{M}$ и отличной от $(a_1, \ldots, a_m)$. Итак, неравенство для функции должно выполняться во всех точках множества $\mathfrak{M}$, лежащих в достаточно малой окрестности

$$(a_1 - \delta,\ a_1 + \delta;\ \ldots;\ a_m - \delta,\ a_m + \delta)$$

точки M_0, но исключая саму эту точку (даже если она принадлежит $\mathfrak{M}$).

В геометрических терминах, вводя для точек $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(a_1, \ldots, a_m)$ обозначения M и M_0, можно было бы перефразировать сказанное так: *число* A *называется пределом функции* $f(M)$ *при стремлении точки* M *к* M_0 (*или в точке* M_0), *если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $r > 0$, *что*

$$|f(M) - A| < \varepsilon,$$

лишь только расстояние $\overline{M_0M} < r$.

Как и выше, точка M предполагается взятой из $\mathfrak{M}$, но отличной от M_0. Таким образом, неравенство для функции должно выполняться во всех точках множества $\mathfrak{M}$, лежащих в достаточно малой сферической окрестности точки M_0, за исключением самой этой точки.

Из замечания n° 126 об окрестностях разных типов непосредственно ясна равносильность обеих форм нового определения предела функции.

Что же касается равносильности нового определения и ранее данного — «на языке последовательностей», то она устанавливается так же, как и в случае функций от одной переменной [n° 33].

Заметим в заключение, что вся теория пределов, развитая выше (глава III), распространяется и на общий случай функций нескольких переменных. В значительной части это распространение осуществляется автоматически, поскольку и здесь всё может быть сведено к последовательности [ср. n° 42].

130. Примеры. 1) Пользуясь теоремой о пределе произведения, прежде всего легко показать, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} C x_1^{\nu_1} \ldots x_m^{\nu_m} = C a_1^{\nu_1} \ldots a_m^{\nu_m},$$

где C, $a_1, \ldots, a_m$ — любые вещественные, а $\nu_1, \ldots, \nu_m$ — неотрицательные целые числа. Отсюда, если через $P(x_1, \ldots, x_m)$ обозначить *целую рациональную* функцию (6), то по теореме о пределе суммы получается также

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} P(x_1, \ldots, x_m) = P(a_1, \ldots, a_m).$$

Аналогично для *дробной рациональной* функции (7) по теореме о пределе частного имеем

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} Q(x_1, \ldots, x_m) = Q(a_1, \ldots, a_m),$$

конечно, лишь при условии, что знаменатель в точке $(a_1, \ldots, a_m)$ в нуль не обращается.

2) Рассмотрим степенно-показательную функцию x^y при $x > 0$ и произвольном y. Тогда, если $a > 0$ и b — любое вещественное число, будем иметь

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} x^y = a^b.$$

Действительно, если взять любые зависящие от n переменные $x_n \to a$ и $y_n \to b$, то [ср. n° **66**]

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \cdot \ln x_n} \to e^{b \cdot \ln a} = a^b,$$

а это — на «языке последовательностей» — и устанавливает требуемый результат.

3) Поставим вопрос о пределе:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

функция здесь определена на всей плоскости за исключением именно точки $x = 0$, $y = 0$.

Если взять две частичные последовательности точек

$$\left\{M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} \quad \text{и} \quad \left\{M'_n\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\},$$

очевидно сходящиеся к точке $(0, 0)$, то окажется, что при всех n

$$f(M_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad f(M'_n) = f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{5}.$$

Отсюда уже следует, что упомянутого предела не существует.

Предлагается аналогично убедиться в том, что не существует предела

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

4) Наоборот, существует предел

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Это сразу вытекает из неравенства

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \frac{1}{2} |x|.$$

131. Повторные пределы. Кроме рассмотренного выше предела функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ при одновременном стремлении всех аргументов к их пределам, приходится иметь дело и с пределами другого рода, получаемыми в результате ряда последовательных предельных переходов по каждому аргументу в отдельности в том или ином порядке. Первый предел называется m-кратным (или двойным, тройным и т. д. — при $m = 2, 3, \ldots$), а последний — повторным.

Ограничимся для простоты случаем функции двух переменных $f(x, y)$. Допустим к тому же, что область $\mathcal{M}$ изменения переменных x, y такова, что x (независимо от y) может принимать любое значение в некотором множестве $\mathcal{X}$, для которого a служит точкой сгущения, но ему не принадлежит, и аналогично y (независимо от x) изменяется в множестве $\mathcal{Y}$ с точкой сгущения b, не принадлежащей ему. Такую область $\mathcal{M}$ можно было бы символически обозначить, как $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Например,

$$(a, a+H; b, b+K) = (a, a+H) \times (b, b+K).$$

Если при любом фиксированном y из $\mathcal{Y}$ существует для функции $f(x, y)$ (которая оказывается функцией лишь от x) предел при $x \to a$, то этот предел, вообще говоря, будет зависеть от наперед фиксированного y:

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y).$$

Затем можно поставить вопрос о пределе функции $\varphi(y)$ при $y \to b$:

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y);$$

это и будет один из двух повторных пределов. Другой получится, если предельные переходы произвести в обратном порядке:

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y).$$

Не следует думать, что повторные пределы эти необходимо равны.

Если, например, в области $\mathcal{M}(0, +\infty;\ 0, +\infty)$ положить:

$$1)\qquad f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

и взять $a = b = 0$, то получим:

$$\varphi(y) = \lim_{x \to 0} f(x, y) = y - 1, \qquad \lim_{y \to 0} \varphi(y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1,$$

в то время как

$$\psi(x) = \lim_{y \to 0} f(x, y) = x + 1, \qquad \lim_{x \to 0} \psi(x) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1.$$

Может случиться также, что один из повторных пределов существует, а другой — нет. Так будет, например, для функции:

$$2)\qquad f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y} \quad \text{или 3)} \quad f(x, y) = x \cdot \sin \frac{1}{y};$$

в обоих случаях здесь существует повторный предел $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f$, но нет повторного предела $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f$ (а в последнем примере — нет даже простого предела $\lim\limits_{y \to 0} f$).

Эти простые примеры показывают, насколько осторожным нужно быть при *перестановке двух предельных переходов по разным переменным*: не раз ошибочные умозаключения проистекали именно от такой незаконной перестановки. В то же время многие важные вопросы анализа связаны именно с перестановкой предельных переходов, но, разумеется, всякий раз дозволительность перестановки должна быть особо обоснована.

Один из путей к такому обоснованию открывает следующая важная теорема, которая в то же время устанавливает связь между двойными и повторными пределами:

Теорема. *Если* 1) *существует (конечный или нет) двойной предел*

$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$$

и 2) *при любом* y *из* $\mathcal{Y}$ *существует (конечный) простой предел по* x

$$\varphi(y) = \lim_{x \to a} f(x, y),$$

то существует повторный предел

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y),$$

равный двойному.

Докажем это для случая конечных A, a и b. Согласно определению предела функции «на языке ε-δ» [129], по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \tag{11}$$

лишь только $|x - a| < \delta$ и $|y - b| < \delta$ (причем x берется из $\mathscr{X}$, а y из $\mathscr{Y}$). Фиксируем теперь y так, чтобы выполнялось неравенство $|y - b| < \delta$, и перейдем в (11) к пределу, устремив x к a. Так как, ввиду 2), $f(x, y)$ при этом стремится к пределу $\varphi(y)$, то получим

$$|\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Вспоминая, что y здесь есть любое число из $\mathscr{Y}$, подчиненное лишь условию $|y - b| < \delta$, приходим к заключению, что

$$A = \lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Если, наряду с условиями 1) и 2), при любом x из $\mathscr{X}$ существует (конечный) простой предел по y

$$\psi(x) = \lim_{y \to b} f(x, y),$$

то, как следует из уже доказанного, если x и y поменять ролями, существует также и второй повторный предел

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y),$$

равный тому же числу A: в этом случае оба повторных предела равны.

Из доказанной теоремы сразу ясно, что в примерах 1) и 2) двойной предел не существует. В этом легко убедиться и непосредственно.

В примере 3), наоборот, двойной предел существует: из неравенства

$$\left| x \cdot \sin \frac{1}{y} \right| \leqslant |x|$$

усматриваем, что он равен нулю. Этот пример показывает, что условие 1) теоремы не влечет за собой условия 2).

Не следует думать, однако, что существование двойного предела необходимо для равенства повторных: в примере 3) предыдущего номера оба повторных предела существуют и равны нулю, хотя двойного предела нет.

§ 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

132. Непрерывность и разрывы функций нескольких переменных. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ определена в некотором множестве $\mathscr{M}$ точек m-мерного пространства, и $M'(x'_1, \ldots, x'_m)$ есть точка сгущения этого множества, принадлежащая самому множеству.

Говорят, что *функция* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *непрерывна в точке* $M'(x'_1, \ldots, x'_m)$, *если имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x'_1 \\ \ldots \\ x_m \to x'_m}} f(x_1, \ldots, x_m) = f(x'_1, \ldots, x'_m); \tag{1}$$

в противном же случае функция терпит разрыв в точке M'.

На «языке ε-δ» непрерывность функции в точке M' выразится так [129]: *по любому заданному* $\varepsilon > 0$ *должно найтись такое* $\delta > 0$, что

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(x'_1, \ldots, x'_m)| < \varepsilon, \tag{2}$$

лишь только

$$|x_1 - x'_1| < \delta, \ldots, |x_m - x'_m| < \delta, \tag{3}$$

или иначе: *по* $\varepsilon > 0$ *должно найтись такое* $r > 0$, *что*

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon,$$

лишь только расстояние

$$\overline{MM'} < r.$$

При этом точка $M(x_1, \ldots, x_m)$ предполагается принадлежащей множеству $\mathfrak{M}$, в частности же, может совпасть и с M'. Именно ввиду того, что предел функции в точке M' тождествен со значением функции в этой точке, обычное требование, чтобы M была отлична от M', здесь становится ненужным.

Рассматривая разности $x_1 - x'_1, \ldots, x_m - x'_m$ как приращения $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ независимых переменных, а разность

$$f(x_1, \ldots, x_m) - f(x'_1, \ldots, x'_m)$$

— как приращение функции, можно сказать (как в случае функций одной переменной), что *функция непрерывна, если бесконечно малым приращениям независимых переменных отвечает бесконечно малое же приращение функции*.

Определенная выше непрерывность функции в точке M' есть, так сказать, непрерывность по всей совокупности переменных $x_1, \ldots, x_m$. Если она имеет место, то одновременно и

$$\lim_{x_1 \to x'_1} f(x_1, x'_2, \ldots, x'_m) = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m),$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x'_1 \\ x_2 \to x'_2}} f(x_1, x_2, x'_3, \ldots, x'_m) = f(x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_m)$$

и т. п., ибо здесь мы осуществляем лишь частные законы приближения M к M'. Иными словами, функция оказывается непрерывной в отдельности по каждой переменной x_i, по каждой паре переменных x_i, x_j, и т. д.

С примерами непрерывных функций мы уже сталкивались. Так, в n° **130**, 1) была установлена непрерывность целой и дробной рациональной функций от m аргументов во всех точках m-мерного пространства (для дробной функции — за исключением тех точек, которые обращают ее знаменатель в нуль). Там же, в 2), была доказана непрерывность степенно-показательной функции x^y для всех точек правой полуплоскости ($x > 0$).

Если вновь рассмотреть функцию

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (\text{для } x^2 + y^2 > 0),$$

определенную этой формулой во всей плоскости, кроме начальной точки, и положить дополнительно $f(0, 0) = 0$, то получим пример разрыва. Он имеет место именно в начальной точке, так как [n° **130**, 3)] при $x \to 0$, $y \to 0$ для функции предела не существует.

Здесь мы сталкиваемся с таким интересным обстоятельством. Рассмотренная функция $f(x, y)$, хотя и не является непрерывной в точке $(0, 0)$ по совокупности обеих переменных, тем не менее будет непрерывна в этой точке как по x, так и по y в отдельности; это следует из того, что $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Впрочем, сказанное перестает быть удивительным, если сообразить, что, говоря о непрерывности по x и по y в отдельности, мы учитываем лишь приближение к точке $(0, 0)$ вдоль по оси x или по оси y, оставляя в стороне бесчисленное множество других законов приближения.

Замечание. Коши в «Алгебраическом анализе» пытался доказать, что функция от нескольких переменных, непрерывная по каждой из них в отдельности, будет непрерывна и по их совокупности. Предыдущий пример как раз и служит для опровержения этого утверждения.

Если для функции $f(M)$ при стремлении M к M' вовсе не существует определенного конечного предела

$$\lim_{M \to M'} f(M),$$

то говорят, что в точке M' функция имеет разрыв, даже в том случае, когда в самой точке M' функция не определена.

133. Операции над непрерывными функциями. Легко сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы, разности, произведения, частного двух непрерывных функций [ср. n° **62**]; предоставляем это читателю.

Мы остановимся лишь на теореме о суперпозиции непрерывных функций. Как и в n° **128**, мы предположим, что, кроме функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$, заданной в множестве $\mathcal{M}$ m-мерных точек $M(x_1, \ldots, x_m)$, нам даны еще m функций

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ \ldots, \ x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k) \tag{4}$$

в некотором множестве $\mathcal{P}$ k-мерных точек $P(t_1, \ldots, t_k)$, причем точка M с координатами (4) не выходит за пределы упомянутого множества $\mathcal{M}$.

Теорема. *Если функции $\varphi_i(P)$ $(i = 1, \ldots, m)$ все непрерывны в точке $P'(t_1', \ldots, t_k')$ из $\mathcal{G}$, а функция $f(M)$ непрерывна в соответствующей точке $M'(x_1', \ldots, x_m')$ с координатами*

$$x_1' = \varphi_1(t_1', \ldots, t_k'), \ldots, x_m' = \varphi_m(t_1', \ldots, t_k'),$$

то и сложная функция

$$u = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)) = f(\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P))$$

будет непрерывна в точке P'.

Действительно, сначала по $\varepsilon > 0$ определится число $\delta > 0$ такое, что из (3) следует (2) (ввиду непрерывности функции f). Затем по числу δ (ввиду непрерывности функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$) найдется число $\eta > 0$ такое, что неравенства

$$|t_1 - t_1'| < \eta, \ldots, |t_k - t_k'| < \eta \qquad (5)$$

влекут за собой неравенства

$$|x_1 - x_1'| = |\varphi_1(t_1, \ldots, t_k) - \varphi_1(t_1', \ldots, t_k')| < \delta, \ldots$$
$$|x_m - x_m'| = |\varphi_m(t_1, \ldots, t_k) - \varphi_m(t_1', \ldots, t_k')| < \delta.$$

Но тогда, при наличии (5), будет также:

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1', \ldots, x_m')| =$$
$$= |f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)) -$$
$$- f(\varphi_1(t_1', \ldots, t_k'), \ldots, \varphi_m(t_1', \ldots, t_k'))| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

134. Теорема об обращении функции в нуль. Займемся теперь изучением свойств функции нескольких переменных, непрерывных в каждой точке некоторой области $\mathcal{D}$ (или — короче — непрерывной в области $\mathcal{D}$) m-мерного пространства *). Они вполне аналогичны свойствам функции одной переменной, непрерывной в промежутке (глава IV, § 2).

При изложении мы — лишь для краткости — ограничимся случаем двух независимых переменных. Перенесение на общий случай производится непосредственно и не представляет труда. Впрочем, некоторые замечания по этому поводу будут сделаны попутно.

Для того чтобы сформулировать теорему, аналогичную первой теореме Больцано — Коши [n° **68**], мы нуждаемся в понятии *связной области*: так называется область, любые две точки которой могут быть соединены *ломаной* [n° **125**], лежащей в этой области всеми своими точками.

---

*) Понимая «область» в смысле n° **127**.

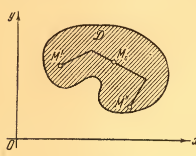
Теорема. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой* ***связной*** *области $\mathcal{D}$. Если в двух точках $M'(x', y')$ и $M''(x'', y'')$ этой области функция принимает значения разных знаков:*

$$f(x', y') < 0, \quad f(x'', y'') > 0,$$

то в этой области найдется и точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой функция обращается в нуль: $f(x_0, y_0) = 0$.

Доказательство мы построим на сведéнии к случаю функции одной независимой переменной.

Ввиду связности области $\mathcal{D}$, точки M' и M'' можно соединить ломаной, лежащей в $\mathcal{D}$ (черт. 57). Если в какой-либо из ее вершин функция $f(x, y)$ обращается в нуль, то утверждение теоремы оправдано. В противном случае, перебирая стороны ломаной одну за другой, непременно придем к такому прямолинейному отрезку, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Таким образом, можно было бы, не умаляя общности, с самого начала считать, что именно прямолинейный отрезок $M'M''$, имеющий уравнения



Черт. 57.

$$x = x' + t(x'' - x'),$$
$$y = y' + t(y'' - y')$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 1),$$

всеми точками принадлежит области $\mathcal{D}$. Если точка $M(x, y)$ передвигается вдоль этого отрезка, то наша первоначальная функция $f(x, y)$ превратится в сложную функцию одной переменной t:

$$F(t) = f(x' + t(x'' - x'), \quad y' + t(y'' - y')),$$

очевидно, непрерывную — по теореме предыдущего номера. Но для $F(t)$ имеем:

$$F(0) = f(x', y') < 0 \quad \text{и} \quad F(1) = f(x'', y'') > 0.$$

Применяя к функции $F(t)$ уже доказанную в n° 68 теорему, заключаем, что $F(t_0) = 0$ при некотором значении t_0 между нулем и единицей. Вспоминая определение функции $F(t)$, имеем, таким образом:

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

если положить

$$x_0 = x' + t_0(x'' - x'), \quad y_0 = y' + t_0(y'' - y').$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ и есть искомая.

Отсюда вытекает теорема, аналогичная второй теореме Больцано — Коши (которая, впрочем, могла быть получена и сразу).

Читатель видит, что переход к пространству m измерений (при $m > 2$) не создает никаких затруднений, ибо в m-мерной связной области точки также могут быть соединены ломаной, и вопрос сведется, как и только что, к рассмотрению сложной функции от одной переменной.

135. Лемма Больцано—Вейерштрасса. Для дальнейшего изложения нам понадобится обобщение леммы n° **51** на случай последовательности точек в пространстве любого числа измерений. Условимся называть множество точек $\mathfrak{M}$ в этом пространстве ограниченным, если это множество содержится в некотором параллелепипеде. Как всегда, остановимся лишь на «плоском» случае.

Из любой ограниченной последовательности точек

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n),\ \ldots$$

всегда можно извлечь такую частичную последовательность

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}),\ M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}),\ \ldots,\ M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}),\ \ldots$$
$$(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,\ n_k \to +\infty)$$

которая сходилась бы к предельной точке.

Доказательство проще всего построить, если использовать лемму, уже доказанную в n° **51** для случая линейной последовательности.

Так как наша последовательность предположена ограниченной, то все ее точки содержатся в некотором прямоугольнике $[a, b; c, d]$, так что

$$a \leqslant x_n \leqslant b,\ c \leqslant y_n \leqslant d \quad (\text{для } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Применив лемму n° **51** сначала к последовательности $\{x_n\}$, выделим частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому пределу $\bar{x}$. Таким образом, для частичной последовательности точек

$$(x_{n_1}, y_{n_1}),\ (x_{n_2}, y_{n_2}),\ \ldots,\ (x_{n_k}, y_{n_k}),\ \ldots$$

первые координаты уже имеют предел. Вторично применим упомянутую теорему к последовательности вторых координат $\{y_{n_k}\}$ и выделим такую частичную последовательность $\{y_{n_{k_i}}\}$, которая тоже стремится к некоторому пределу $\bar{y}$. Тогда, очевидно, частичная последовательность точек

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}),\ (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}),\ \ldots,\ (x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}),\ \ldots$$

будет стремиться к предельной точке $(\bar{x}, \bar{y})$.

И здесь рассуждение легко переносится на случай пространства $m > 2$ измерений: лишь выделение частичных последовательностей в общем случае пришлось бы повторить не два раза, а m раз.

136. Теорема об ограниченности функции. С помощью доказанной теоремы легко может быть установлена для функций двух переменных первая теорема Вейерштрасса:

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$ *), то она ограничена как снизу, так и сверху, т. е. все ее значения содержатся между двумя конечными границами:*

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Доказательство (от противного) вполне аналогично рассуждению n° **72**. Пусть функция $f(x, y)$ при изменении (x, y) в $\mathcal{D}$ оказывается неограниченной, скажем, сверху. Тогда для любого n найдется в $\mathcal{D}$ такая точка $M_n(x_n, y_n)$, что

$$f(x_n, y_n) > n. \tag{6}$$

По лемме n° **135** из ограниченной последовательности $\{M_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{M_{n_k}\}$, сходящуюся к предельной точке $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$.

Отметим, что эта точка $\overline{M}$ необходимо принадлежит области $\mathcal{D}$. Действительно, в противном случае точки M_{n_k} все были бы от нее отличны, и точка $\overline{M}$ была бы точкой сгущения области $\mathcal{D}$, ей не принадлежащей, что невозможно ввиду замкнутости области $\mathcal{D}$ [см. **127**].

Вследствие непрерывности функции в точке $\overline{M}$ должно быть

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\overline{x}, \overline{y}),$$

а это находится в противоречии с (6).

Вторая теорема Вейерштрасса формулируется и доказывается (со ссылкой на предыдущую теорему) совершенно так же, как и в n° **73**.

Заметим, что — без существенных изменений в рассуждениях — обе теоремы Вейерштрасса переносятся и на случай, когда функция непрерывна в любом ограниченном замкнутом множестве $\mathcal{M}$ (хотя бы и не представляющем собою области).

Как и в случае функции одной переменной, для функции $f(x, y)$, определенной и ограниченной в множестве $\mathcal{M}$, разность между точными верхней и нижней границами значений функции в $\mathcal{M}$ называется ее колебанием в этом множестве. Если $\mathcal{M}$ ограничено и замкнуто (в частности, если $\mathcal{M}$ есть ограниченная замкнутая область), и функция f в нем непрерывна, то колебание есть попросту разность между наибольшим и наименьшим ее значениями.

137. Равномерная непрерывность. Мы знаем, что непрерывность функции $f(x, y)$ в определенной точке (x_0, y_0) множества $\mathcal{M}$,

*) Которая, на этот раз, может быть и несвязной.

где функция задана, на «языке ε-δ» выражается так: по любому $\varepsilon > 0$ должно найтись такое $\delta > 0$, что неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

выполняется для всякой точки (x, y) из $\mathcal{M}$, лишь только

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

Пусть теперь функция $f(x, y)$ непрерывна во всем множестве $\mathcal{M}$; тогда возникает вопрос, можно ли по данному $\varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, которое годилось бы — в указанном смысле — для всех точек (x_0, y_0) из $\mathcal{M}$ одновременно. Если это возможно (при любом ε), то говорят, что функция в $\mathcal{M}$ равномерно непрерывна.

Теорема Кантора. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$, то она будет и равномерно непрерывна в $\mathcal{D}$.*

Доказательство поведем от противного. Допустим, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$ не существует числа $\delta > 0$, которое годилось бы одновременно для всех точек (x_0, y_0) области $\mathcal{D}$.

Возьмем последовательность стремящихся к нулю положительных чисел

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n > \ldots > 0, \; \delta_n \to 0.$$

Так как ни одно из чисел δ_n не может годиться — в указанном смысле — одновременно для всех точек (x_0, y_0) области $\mathcal{D}$, то для каждого δ_n найдется в $\mathcal{D}$ такая конкретная точка (x_n, y_n), для которой δ_n не годится. Это значит, что существует в $\mathcal{D}$ точка (x'_n, y'_n), для которой

$$|x'_n - x_n| < \delta_n, \; |y'_n - y_n| < \delta_n,$$

и тем не менее

$$|f(x'_n, y'_n) - f(x_n, y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Из ограниченной последовательности точек $\{(x_n, y_n)\}$, по лемме Больцано — Вейерштрасса, извлечем такую частичную последовательность $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$, что $x_{n_k} \to \bar{x}$, $y_{n_k} \to \bar{y}$, причем предельная точка $(\bar{x}, \bar{y})$ необходимо принадлежит области $\mathcal{D}$ (ввиду ее замкнутости).

Так как, далее,

$$|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \delta_{n_k}, \quad |y'_{n_k} - y_{n_k}| < \delta_{n_k}$$

и, при возрастании k, $n_k \to +\infty$ и $\delta_{n_k} \to 0$, то

$$x'_{n_k} - x_{n_k} \to 0, \quad y'_{n_k} - y_{n_k} \to 0,$$

так что и

$$x'_{n_k} \to \bar{x}, \quad y'_{n_k} \to \bar{y}.$$

Ввиду непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, принадлежащей области $\mathcal{D}$, мы должны иметь как

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

так и

$$f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

откуда

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to 0,$$

что оказывается в противоречии с неравенством (7). Теорема доказана.

Для формулировки вытекающего отсюда следствия нам понадобится понятие *диаметра* точечного множества: так называется точная верхняя граница расстояний между любыми двумя точками множества.

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$, то по данному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, на какие бы частичные замкнутые же области $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ с диаметрами, меньшими δ, ни разбить эту область* *), *колебание функции в каждой части в отдельности будет меньше ε.*

Достаточно за δ взять то число, о котором говорится в определении равномерной непрерывности. Если диаметр частичной области $\mathcal{D}_i$ меньше δ, то расстояние между любыми двумя ее точками (x, y) и (x_0, y_0) меньше $\delta : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$. Отсюда и подавно $|x-x_0| < \delta$ и $|y-y_0| < \delta$, так что $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Если эти точки выбрать так, чтобы $f(x, y)$ и $f(x_0, y_0)$ были, соответственно, наибольшим и наименьшим из значений функции в области $\mathcal{D}_i$, то и получим требуемое утверждение.

Легко видеть, что доказанная теорема без изменений переносится (подобно теоремам Вейерштрасса) на случай функции, непрерывной в любом ограниченном замкнутом множестве $\mathcal{M}$.

*) Эти частичные области могут иметь общими лишь пограничные точки.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

138. Частные производные. Для упрощения записи и изложения мы ограничимся случаем функций от трех переменных; всё дальнейшее, однако, справедливо и для функций любого числа переменных.

Итак, пусть в некоторой (открытой) области $\mathcal{D}$ имеем функцию $u=f(x, y, z)$; возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в этой области. Если мы припишем y и z постоянные значения y_0 и z_0 и будем изменять x, то и u будет функцией от одной переменной x в окрестности x_0; можно поставить вопрос о вычислении ее производной в точке x_0. Придадим этому значению x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение

$$\Delta_x u = f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

которое можно было бы назвать ее ч а с т н ы м п р и р а щ е н и е м (по x), поскольку оно вызвано изменением значения лишь одной переменной. По самому определению производной, она представляет собою предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Эта производная называется *ч а с т н о й производной функции* $f(x, y, z)$ *по* x *в точке* (x_0, y_0, z_0).

Как видим, в этом определении не все координаты равноправны, так как y_0 и z_0 фиксированы, а x меняется, стремясь к x_0.

Частную производную обозначают одним из символов:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\,{}^{*)};\quad u'_x,\quad f'_x(x_0, y_0, z_0);\quad D_x u,\quad D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

---

*) Обычно пользуются круглым ∂ (вместо прямого d) в обозначении именно ч а с т н о й производной.

Заметим, что буква x внизу в этих обозначениях лишь указывает, по какой из переменных берется производная, и не связана с тем, в какой точке (x_0, y_0, z_0) мы производную вычисляем *).

Аналогично, считая x и z постоянными, а y переменным, можно рассматривать предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}.$$

Предел этот называется *частной производной функции* $f(x, y, z)$ *по* y *в точке* (x_0, y_0, z_0) и обозначается символами, аналогичными предыдущим:

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}; \quad u'_y, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0); \quad D_y u, \quad D_y f(x_0, y_0, z_0).$$

Точно так же определяется и *частная производная функции* $f(x, y, z)$ *по* z *в точке* (x_0, y_0, z_0).

Самое вычисление частной производной по существу не представляет ничего нового по сравнению с вычислением обыкновенной производной.

Примеры. 1) Пусть $u = x^y$ $(x > 0)$; частные производные этой функции будут:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

Первая из них вычисляется как производная степенной функции от x (при $y = \text{const}$), а вторая — как производная показательной функции от y (при $x = \text{const}$).

2) Если $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

3) Для $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

---

*) И здесь цельные символы

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x, \quad D_x f$$

можно рассматривать как функциональные обозначения для частной производной по x. Подобных примечаний впредь мы повторять уже не станем.

Заметим, что общепринятые обозначения частных производных (с круглыми ∂) следует рассматривать только как цельные символы, а не как частные или дроби.

139. Полное приращение функции. Если, исходя из значений $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ независимых переменных, придать всем трем некоторые приращения Δx, Δy, Δz, то функция $u = f(x, y, z)$ получит приращение

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = \\ = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

которое называется *полным приращением функции*.

В случае функции $y = f(x)$ от одной переменной, в предположении существования в точке x_0 (конечной) производной $f'(x_0)$, для приращения функции имеет место формула [82, (2)]:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где α зависит от Δx и $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Мы имеем в виду установить аналогичную формулу для приращения функции $u = f(x, y, z)$:

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = \\ = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \\ + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z, \qquad (1)$$

где α, β, γ зависят от Δx, Δy, Δz и вместе с ними стремятся к нулю. Однако на этот раз придется наложить на функцию более тяжелые ограничения.

1°. *Если частные производные* $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ *существуют не, только в точке* (x_0, y_0, z_0), *но и в некоторой ее окрестности, и, кроме того, непрерывны (как функции от* x, y, z) *в этой точке, то имеет место формула* (1).

Для доказательства представим полное приращение функции Δu в виде

$$\Delta u = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)] + \\ + [f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)] + \\ + [f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)].$$

Каждая из этих разностей представляет *частное* приращение функции лишь по одной переменной. Так как мы предположили существование частных производных в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то — при достаточной малости Δx, Δy, Δz — к этим разностям по

отдельности можно применить формулу конечных приращений [n° 102] *); мы получим:

$$\Delta u = f'_x(x_0 + \theta\,\Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)\cdot\Delta x +$$
$$+ f'_y(x_0,\ y_0 + \theta_1\,\Delta y,\ z_0 + \Delta z)\cdot\Delta y + f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0 + \theta_2\,\Delta z)\cdot\Delta z.$$

Если положить здесь

$$f'_x(x_0 + \theta\,\Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) = f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0) + \alpha,$$
$$f'_y(x_0,\ y_0 + \theta_1\,\Delta y,\ z_0 + \Delta z) = f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0) + \beta,$$
$$f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0 + \theta_2\,\Delta z) = f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0) + \gamma,$$

то придем к выражению (1) для Δu. При $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ аргументы производных в левых частях этих равенств стремятся к x_0, y_0, z_0 (ибо θ, θ_1, θ_2 — правильные дроби), следовательно, сами производные, ввиду предположенной непрерывности их для этих значений переменных, стремятся к производным в правых частях, а величины α, β, γ — к нулю. Этим и завершается доказательство.

Доказанная теорема дает возможность, между прочим, установить, что

2°. *Из существования и непрерывности в данной точке частных производных вытекает непрерывность в этой точке самой функции.*

Действительно, если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, то, очевидно, и $\Delta u \to 0$.

Для того чтобы формулу (1) можно было написать в более компактной форме, введем в рассмотрение выражение

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

— расстояние между точками $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)$.

Пользуясь им, можем написать:

$$\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z = \left(\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\cdot\frac{\Delta y}{\rho} + \gamma\cdot\frac{\Delta z}{\rho}\right)\rho.$$

Обозначив выражение, стоящее в скобках, через ε, будем иметь

$$\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z = \varepsilon\rho,$$

*) Если взять, например, первую разность, то ее можно рассматривать как приращение функции $f(x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)$ от одной переменной x, отвечающее переходу от $x = x_0$ к $x = x_0 + \Delta x$. Производная по x от этой функции, т. е. $f'_x(x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)$, по предположению, существует для всех значений x в промежутке $[x_0,\ x_0 + \Delta x]$, так что формула конечных приращений применима, и т. д.

где ε зависит от Δx, Δy, Δz и стремится к нулю, если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, или, короче, если $\rho \to 0$. Итак, формулу (1) можно теперь переписать в виде:

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y + \\ + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z + \varepsilon\cdot\rho, \quad (2)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Величина $\varepsilon\cdot\rho$, очевидно, может быть записана, как $o(\rho)$ (если распространить введенное в п° **54** обозначение и на случай функций нескольких переменных).

Заметим, что в нашем рассуждении не был формально исключен случай, когда приращения Δx, Δy, Δz порознь или даже все сразу равны нулю, Таким образом, говоря о предельных соотношениях

$$\alpha \to 0,\ \beta \to 0,\ \gamma \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, мы понимаем их в широком смысле и не исключаем для этих приращений возможности в процессе их изменения обращаться в нуль. [Ср. аналогичное замечание в п° **82**].

При доказательстве предыдущей теоремы мы потребовали от функции нескольких переменных больше, чем в случае функции одной переменной. Для того чтобы показать, что без соблюдения этих требований формула (1) или (2) здесь могла бы оказаться и неприложимой, рассмотрим, в заключение, следующий пример (где для простоты мы имеем дело всего лишь с двумя независимыми переменными).

Определим функцию $f(x, y)$ равенствами

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{если } x^2 + y^2 > 0),\ f(0, 0) = 0.$$

Эта функция непрерывна на всей плоскости; для точки (0, 0) это следует из п° **130**, 4). Далее, существуют частные производные по x и по y также на всей плоскости. При $x^2 + y^2 > 0$, очевидно,

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

В начальной же точке имеем: $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$; это непосредственно вытекает, по самому определению частных производных, из того, что $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Легко показать, что в точке (0, 0) непрерывность производных нарушается (для первой из них достаточно, например, положить $y = x = \frac{1}{n} \to 0\Big)$.

Формула вида (1) или (2) для нашей функции в точке (0, 0) не имеет места. В самом деле, если допустить противное, то было бы

$$\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Положив, в частности, $\Delta y = \Delta x > 0$, имели бы

$$\frac{1}{2}\Delta x = \varepsilon\sqrt{2}\cdot\Delta x, \quad \text{откуда} \quad \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

и ε не стремилось бы к нулю при $\Delta x \to 0$, что противоречит допущению.

140. Производные от сложных функций. В виде приложения полученной формулы (1), займемся вопросом о дифференцировании сложных функций. Пусть имеем функцию

$$u = f(x, y, z),$$

определенную в области $\mathscr{D}$, причем каждая из переменных x, y, z, в свою очередь, является функцией от переменной t в некотором промежутке:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Пусть, кроме того, при изменении t точки (x, y, z) не выходят за пределы области $\mathscr{D}$.

Подставив значения x, y и z в функцию u, получим сложную функцию:

$$u = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)).$$

Предположим, что u имеет по x, y и z непрерывные частные производные u'_x, u'_y, u'_z и что x'_t, y'_t и z'_t существуют. Тогда можно доказать существование производной сложной функции и вместе с тем вычислить ее.

Действительно, придадим переменной t некоторое приращение Δt, тогда x, y и z получат соответственные приращения Δx, Δy и Δz, функция же u получит приращение Δu.

Представив приращение функции u в форме (1) (это мы сделать можем, так как предположили существование *непрерывных* частных производных u'_x, u'_y, u'_z), получим

$$\Delta u = u'_x\cdot\Delta x + u'_y\cdot\Delta y + u'_z\cdot\Delta z + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y + \gamma\cdot\Delta z,$$

где α, β, $\gamma \to 0$ при Δx, Δy, $\Delta z \to 0$. Разделив обе части равенства на Δt, будем иметь

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Устремим теперь приращение Δt к нулю; тогда Δx, Δy, Δz будут стремиться к нулю, так как функции x, y и z от t непрерывны (мы предположили существование производных x'_t, y'_t и z'_t), а потому α, β и γ также будут стремиться к нулю. В пределе получим

$$u'_t = u'_x\cdot x'_t + u'_y\cdot y'_t + u'_z\cdot z'_t. \tag{3}$$

Видим, что при сделанных предположениях производная сложной функции действительно существует. Если воспользоваться дифференциальным обозначением, то формулу (3) можно записать так:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

Теперь рассмотрим тот случай, когда x, y и z зависят не от одной переменной t, а от нескольких переменных; например,

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v).$$

Кроме существования и непрерывности частных производных функции $f(x, y, z)$, мы предполагаем здесь существование производных от функций x, y, z по t и v.

После подстановки функций φ, ψ и χ в функцию f мы будем иметь некоторую функцию от двух переменных t и v, и возникает вопрос о существовании и вычислении частных производных u'_t и u'_v. Но этот случай не отличается существенно от уже изученного, ибо при вычислении частной производной функции от двух переменных мы одну из переменных фиксируем, и у нас остается функция только от одной переменной. Следовательно, для этого случая формула (3) остается без изменения, а формулу (4) нужно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}. \tag{4a}$$

141. Примеры. 1) Рассмотрим степенно-показательную функцию

$$u = x^y.$$

Положив $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и продифференцировав по только что выведенному правилу дифференцирования сложной функции, получим известную уже нам формулу Лейбница и И. Бернулли:

$$u'_t = y \cdot x^{y-1} \cdot x'_t + x^y \cdot \ln x \cdot y'_t.$$

Раньше мы установили ее (в других обозначениях) с помощью искусственного приема [п° **85**, (5)].

Формула (3) сходна с формулой $u'_t = u'_x \cdot x'_t$ для случая функции u от одной переменной x. Подчеркнем, однако, снова разницу в условиях, при которых были выведены эти формулы. Если u зависит от одной переменной, то достаточно было предположить существование производной u'_x; в случае же нескольких переменных мы вынуждены были предположить еще и непрерывность производных u'_x, u'_y, ... Следующий пример показывает, что одного существования этих производных для действительности формулы (3) вообще недостаточно.

2) Определим функцию $u = f(x, y)$, полагая

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{при } x^2 + y^2 > 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Эта функция, как мы видели, имеет частные производные во всех точках, не исключая и начальной (0, 0), причем

$$f'_x(0,\ 0)=0, \quad f'_y(0,\ 0)=0;$$

заметим, что именно в этой точке производные терпят разрыв.

Если ввести новую переменную t, положив $x=y=t$, то получим сложную функцию от t. По формуле (3) производная этой функции при $t=0$ была бы равна

$$u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t=0.$$

Но, с другой стороны, если на деле подставить значения x и y в данную функцию $u=f(x,\ y)$, получим при $t\neq 0$

$$u=\frac{t^2\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}t.$$

Это верно и при $t=0$.

Продифференцировав теперь непосредственно по t, будем иметь $u'_t=\frac{1}{2}$ при любом значении t, значит и при $t=0$.

Оказывается, что формула (3) в данном случае неприменима.

3) Из уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ переменная y определяется как функция от x:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad (-a<x<a),$$

имеющая производную

$$y'_x=\mp\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Найти эту производную, не разрешая уравнения относительно y.

Решение. Если представить себе, что упомянутая функция подставлена вместо y в уравнение, то последнее удовлетворится тождественно. Продифференцировав полученное тождество по x (с использованием правила дифференцирования сложной функции), найдем

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'_x=0,$$

откуда попрежнему

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

4) Пусть, в общем случае, имеем уравнение

$$F(x,\ y)=0,$$

неразрешенное относительно y (F здесь непрерывна вместе со своими производными). При известных условиях (см. главу XIX второго тома) можно утверждать, что этим уравнением переменная y определяется как функция от x, к тому же имеющая производную (хотя аналитического выражения самой этой функции мы можем и не знать!). В подобном случае y называется неявной функцией от x. Найти производную неявной функции.

Решение. Как и в частном примере, представим себе, что вместо y подставлена именно эта неявная функция. Продифференцировав по x полученное тождество, придем к результату:

$$F'_x(x,\ y)+F'_y(x,\ y)\cdot y'_x=0,$$

откуда (конечно, если $F'_y \neq 0$)

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

142. Полный дифференциал. В случае функции $y = f(x)$ одной переменной мы рассматривали в n° **89** вопрос о представимости ее приращения $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в виде:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (A = \text{const}). \tag{5}$$

Оказалось [n° **90**], что для возможности такого представления необходимо и достаточно, чтобы в точке $x = x_0$ существовала конечная производная $f'(x_0)$, причем написанное равенство осуществляется именно при $A = f'(x_0)$. Линейную часть

$$A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = y'_x \cdot \Delta x$$

приращения функции мы и назвали ее *дифференциалом* dy.

Переходя к функции нескольких, например, трех переменных $f(x, y, z)$, определенной в некоторой (скажем, открытой) области $\mathcal{D}$, естественно поставить аналогичный вопрос о представимости приращения

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

в виде

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\rho), \tag{6}$$

где A, B и C — постоянные, а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Как и в n° **90**, легко показать, что, если имеет место разложение (6), то в точке (x_0, y_0, z_0) существуют частные производные по каждой из переменных, причем

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = B, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = C.$$

Действительно, например, полагая в (6) $\Delta y = \Delta z = 0$ и $\Delta x \neq 0$, получим [ср. n° **90**, (1a)]:

$$\Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|),$$

откуда и следует, что существует

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A.$$

Таким образом, соотношение (6) может быть осуществлено только в виде

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x +$$
$$+ f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + o(\rho), \tag{7}$$

или — в более короткой записи —

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + o(\rho). \tag{7a}$$

Однако, в то время как в случае функции одной переменной существования производной $y'_x = f'(x_0)$ в рассматриваемой точке было уже и достаточно для наличия соотношения (5), в нашем случае существование частных производных

$$u'_x = f'_x(x_0, y_0, z_0), \quad u'_y = f'_y(x_0, y_0, z_0), \quad u'_z = f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

еще не обеспечивает разложения (6). Для случая функции двух переменных мы это видели на примере n° **139**. Там же были указаны достаточные условия для выполнения соотношения (6): это — существование частных производных в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и их непрерывность в этой точке.

При наличии формулы (7) *функция* $f(x, y, z)$ *называется дифференцируемой в точке* (x_0, y_0, z_0) *и* (только в этом случае!) *выражение*

$$u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z =$$
$$= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z,$$

т. е. линейная часть приращения функции, называется ее (*полным*) *дифференциалом* и обозначается символом du или $df(x_0, y_0, z_0)$.

В случае функции нескольких переменных утверждение: «функция дифференцируема» в данной точке, как видим, уже не равнозначно утверждению: «функция имеет частные производные по всем переменным» в этой точке, но означает нечто бо́льшее. Впрочем, мы обычно будем предполагать существование и непрерывность частных производных, а это уже перекрывает дифференцируемость.

Под дифференциалами независимых переменных dx, dy, dz условливаются разуметь произвольные приращения Δx, Δy, Δz *); поэтому можно написать

$$df(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot dz$$

или

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

---

*) Если отождествить дифференциал независимой переменной x с дифференциалом x, как функции от независимых переменных x, y, z, то, по общей формуле, можно написать

$$dx = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y + x'_z \cdot \Delta z = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z = \Delta x;$$

тогда равенство $dx = \Delta x$ оказывается доказанным.

143. Инвариантность формы (первого) дифференциала. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные u'_x, u'_y, u'_z, причем x, y, z, в свою очередь, являются функциями от новых переменных t и v:

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v),$$

также имеющими непрерывные же частные производные x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v. Тогда [п° **140**] не только существуют производные от сложной функции u по t и v, но эти производные также непрерывны по t и v, как это легко усмотреть из (3).

Если бы x, y и z были независимыми переменными, то, как мы знаем, полный дифференциал функции u был бы равен

$$du = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz.$$

В данном же случае u зависит — через посредство x, y, z — от переменных t и v. Следовательно, по отношению к этим переменным дифференциал напишется так:

$$du = u'_t \cdot dt + u'_v \cdot dv.$$

Но, в силу (3),

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t$$

и, аналогично,

$$u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v.$$

Подставив эти значения в выражение для du, будем иметь:

$$du = (u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t)\,dt + (u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v)\,dv.$$

Перегруппируем члены следующим образом:

$$du = u'_x \cdot (x'_t \cdot dt + x'_v \cdot dv) + u'_y \cdot (y'_t \cdot dt + y'_v \cdot dv) + \\ + u'_z \cdot (z'_t \cdot dt + z'_v \cdot dv).$$

Нетрудно видеть, что выражения, стоящие в скобках, суть не что иное, как дифференциалы ф у н к ц и й x, y, z (от t и v), так что мы можем написать

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

Мы пришли к той же самой ф о р м е дифференциала, что и в случае, когда x, y, z были независимыми переменными (но смысл символов dx, dy, dz здесь, конечно, уже другой).

Итак, *для функций нескольких переменных имеет место инвариантность формы* (*первого*) *дифференциала*, как и для функций одной переменной *).

Может случиться, что x, y и z будут зависеть от различных переменных, например,

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t,\ v),\quad z=\chi(v,\ w).$$

В таком случае мы всегда можем считать, что

$$x=\varphi_1(t,\ v,\ w),\quad y=\psi_1(t,\ v,\ w),\quad z=\chi_1(t,\ v,\ w),$$

и все предыдущие рассуждения будут применимы и к этому случаю.

Следствия. Для случая, когда x и y были функциями одной переменной, мы имели следующие формулы:

$$d(cx)=c\cdot dx,\quad d(x\pm y)=dx\pm dy,\quad d(xy)=y\cdot dx+x\cdot dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2}.$$

Эти формулы верны и в том случае, когда x и y являются функциями любого числа переменных, т. е. когда

$$x=\varphi(t,\ v,\ \ldots),\quad y=\psi(t,\ v,\ \ldots).$$

Докажем, например, последнюю формулу.

Для этого примем сначала x и y за независимые переменные; тогда

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot dx-\frac{x}{y^2}\cdot dy=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2}.$$

Видим, что при этом предположении дифференциал имеет тот же вид, что и для функций одной переменной. На основании же инвариантности формы дифференциала можно утверждать, что эта формула справедлива и в том случае, когда x и y являются функциями любого числа переменных.

Доказанное свойство полного дифференциала и следствия из него позволяют упрощать вычисление дифференциалов, например,

$$d\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{x^2+y^2}.$$

Так как коэффициентами при дифференциалах независимых переменных являются соответствующие частные производные, то отсюда сразу же

---

*) Отметим, что то же заключение справедливо и при одном предположении дифференцируемости всех рассматриваемых функций. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что результатом суперпозиции дифференцируемых функций будет также дифференцируемая функция.

получаются и значения этих последних. Например, для $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ имеем непосредственно

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

[ср. n° 138, 2)].

144. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях. Аналогично дифференциалу функции от одной переменной [n° 94], и полный дифференциал функции от нескольких переменных с успехом применяется в приближенных вычислениях при оценке погрешностей. Пусть, например, мы имеем функцию $u = f(x, y)$, причем, определяя значения x и y, мы допускаем погрешности, скажем, Δx и Δy. Тогда и значение u, вычисленное по неточным значениям аргументов, также получится с погрешностью $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$. Речь идет об о ц е н к е этой погрешности, если известны оценки погрешностей Δx и Δy.

Заменяя (приближенно) приращение функции ее дифференциалом (что оправдано лишь при достаточно малых значениях Δx и Δy), получим

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y. \tag{8}$$

Здесь и погрешности Δx, Δy, и коэффициенты при них могут быть как положительными, так и отрицательными; заменяя те и другие их абсолютными величинами, придем к неравенству

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|.$$

Если через δx, δy, δu обозначить м а к с и м а л ь н ы е абсолютные погрешности (или г р а н и ц ы для абсолютных погрешностей), то можно, очевидно, принять

$$\delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\delta y. \tag{9}$$

Приведем п р и м е р ы.

1) Прежде всего, с помощью выведенных формул легко установить обычные в практике приближенных вычислений п р а в и л а. Пусть $u = xy$ (где $x > 0$, $y > 0$), так что $du = y\,dx + x\,dy$; заменяя дифференциалы приращениями, получим $\Delta u = y\cdot\Delta x + x\cdot\Delta y$ [см. (8)] или, переходя к границам погрешностей [см. (9)]:

$$\delta u = y\cdot\delta x + x\cdot\delta y.$$

Деля обе части этого равенства на $u = xy$, придем к окончательной формуле:

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}, \tag{10}$$

выражающей такое п р а в и л о: *(максимальная) относительная погрешность произведения равна сумме (максимальных) относительных погрешностей сомножителей.*

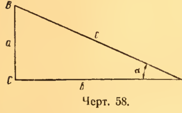
Можно было бы поступить проще — сначала прологарифмировать формулу $u = xy$, а затем продифференцировать:

$$\ln u = \ln x + \ln y, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\ ^{*)} \text{ и т. д.}$$

Если $u = \frac{x}{y}$, то по этому методу найдём

$$\ln u = \ln x - \ln y, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y};$$

переходя к абсолютным величинам и к максимальным погрешностям, мы получим снова формулу (10). Таким образом, *(максимальная) относительная погрешность частного равна сумме (максимальных) относительных погрешностей делимого и делителя.*



Черт. 58.

2) Частое применение находит исчисление погрешностей в топографии, главным образом при вычислении не измеренных непосредственно элементов треугольника — по измеренным его элементам. Приведем пример из этой области.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC (черт. 58) катет $AC = b$ и прилежащий угол $BAC = \alpha$ измерены; второй же катет a вычисляется по формуле: $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Как отражаются на значении a погрешности при измерении b и α?

Дифференцируя, получим:

$$da = \operatorname{tg} \alpha\, db + \frac{b}{\cos^2 \alpha}\, d\alpha,$$

так что и

$$\delta a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot \delta \alpha.$$

145. Однородные функции. Как известно, однородными многочленами называются многочлены, состоящие из членов одного и того же измерения. Например, выражение

$$3x^2 - 2xy + 5y^2$$

есть однородный многочлен второй степени. Если умножить здесь x и y на некоторый множитель t, то весь многочлен приобретет множитель t во второй степени. Подобное обстоятельство имеет место для любого однородного многочлена.

Однако и функции более сложной природы могут обладать таким же свойством; если взять, например, выражение

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln \frac{x}{y},$$

---

*) Обращаем внимание читателя на то, что дифференциал $\ln u$ мы вычисляем так, как если бы u была независимой переменной, хотя на деле она является функцией от x и y. Это замечание следует иметь в виду и ниже.

то и оно приобретает множитель t^2 при умножении обоих аргументов x и y на t, уподобляясь в этом отношении однородному многочлену второй степени. Подобную функцию естественно также назвать однородной функцией второй степени.

Дадим общее определение:

Функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ от m аргументов, определенная в области $\mathcal{D}$, называется однородной функцией k-й степени, если при умножении всех ее аргументов на множитель t функция приобретает этот же множитель в k-й степени, т. е. если тождественно выполняется равенство

$$f(tx_1, \ldots, tx_m) = t^k \cdot f(x_1, \ldots, x_m). \tag{11}$$

Для простоты мы ограничимся предположением, что $x_1, \ldots, x_m$ и t здесь принимают лишь положительные значения. Область $\mathcal{D}$, в которой мы рассматриваем функцию f, вместе с любой своей точкой $M(x_1, \ldots, x_m)$ предполагается содержащей и все точки вида $M_t(tx_1, \ldots, tx_m)$ при $t > 0$, т. е. весь луч, исходящий из начальной точки и проходящий через точку M.

Степень однородности k может быть любым вещественным числом; так, например, функция

$$x^\pi \cdot \sin\frac{y}{x} + y^\pi \cdot \cos\frac{y}{x}$$

является однородной функцией степени π от аргументов x и y.

Постараемся теперь получить общее выражение однородной функции степени k.

Пусть сперва $f(x_1, \ldots, x_m)$ есть однородная функция нулевой степени; тогда

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Положив $t = \frac{1}{x_1}$, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

Если ввести функцию от $m - 1$ аргументов:

$$\varphi(u_1, \ldots, u_{m-1}) = f(1, u_1, \ldots, u_{m-1}),$$

то окажется, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

Итак, всякая однородная функция нулевой степени представляется в виде функции отношений всех аргументов к одному из них. Обратное, очевидно, также верно, так что предшествующее равенство дает общее выражение однородной функции нулевой степени.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ есть однородная функция k-й степени, то отношение ее к x_1^k будет однородной функцией нулевой степени, так что, по доказанному,

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{x_1^k} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

и

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^k \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

Если, наоборот, для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ выполняется подобное равенство, то она, как легко проверить, будет однородной функцией степени k. Таким образом, мы получили *общий вид однородной функции степени* k.

Пример:

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y} \cdot \ln\frac{x}{y} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\frac{y}{x}-1} \cdot \ln\frac{y}{x}.$$

Предположим теперь, что однородная (степени k) функция $f(x, y, z)$ *) имеет в (открытой) области $\mathcal{D}$ непрерывные частные производные по всем аргументам. Фиксируя по произволу точку (x_0, y_0, z_0) из $\mathcal{D}$, в силу основного тождества (11) будем иметь для любого $t > 0$:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^k \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Продифференцируем теперь это равенство по t: левую часть равенства — по правилу дифференцирования сложной функции **), правую — просто как степенную функцию. Получим:

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot y_0 + \\ + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot z_0 = k \cdot t^{k-1} \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Если положить здесь $t = 1$, то придем к следующей формуле:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y_0 + \\ + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z_0 = k \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, для любой точки (x, y, z) имеет место равенство

$$f'_x(x, y, z) \cdot x + f'_y(x, y, z) \cdot y + f'_z(x, y, z) \cdot z = k \cdot f(x, y, z). \quad (12)$$

Это равенство носит название *формулы Эйлера*.

---

*) Лишь для упрощения письма мы ограничиваемся здесь случаем трех переменных.

**) Именно для того, чтобы иметь право применить это правило, мы и предположили непрерывность частных производных [n° 140].

Мы видели, что этому равенству удовлетворяет любая однородная функция степени k, имеющая непрерывные частные производные. Можно показать, что и обратно — каждая функция, непрерывная вместе со своими частными производными и удовлетворяющая равенству Эйлера (12), необходимо является однородной функцией степени k.

Замечание. Эйлер в «Дифференциальном исчислении» рассматривает лишь частные типы однородных выражений — целые, дробные, радикальные и их сочетания, и не дает общего определения. Но при выводе формулы, носящей его имя, он исходит из представления однородной функции в виде произведения степени одного из аргументов на функцию от отношений к нему остальных.

§ 2. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

146. Производные высших порядков. Если функция $u = f(x, y, z)$*) имеет в некоторой (открытой) области $\mathcal{D}$ частную производную по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от x, y, z, может в свою очередь в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) иметь частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции $u = f(x, y, z)$ эти последние производные будут частными производными второго порядка (или вторыми частными производными).

Если первая производная была взята, например, по x, то ее производные по x, y, z обозначаются так;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z)}{\partial x\, \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\, \partial z}$$

или

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$
$$u''_{xz} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0) \text{**)}.$$

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и т. д. порядков (третьи, четвертые, ... производные). Общее определение частной производной n-го порядка может быть дано индуктивно.

---

*) Мы и здесь для простоты письма ограничиваемся случаем функции от трех переменных.

**) Разумеется, дифференциальные обозначения следует рассматривать как цельные символы. Квадрат ∂x^2 в знаменателе заменяет условно $\partial x\, \partial x$ и указывает на дифференцирование дважды по x; точно так же значок x^2 внизу заменяет xx. Это нужно иметь в виду и дальше.

Заметим, что частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2},\ \ldots,$$

называется смешанной частной производной.

Примеры. 1) Пусть $u = x^4y^3z^2$; тогда:

$$u'_x = 4x^3y^3z^2,\quad u''_{xy} = 12x^3y^2z^2,\quad u'''_{xyz} = 24x^3y^2z,\quad u^{(4)}_{xyzx} = 72x^2y^2z,$$

$$u'_y = 3x^4y^2z^2,\quad u''_{yx} = 12x^3y^2z^2,\quad u'''_{yxx} = 36x^2y^2z^2,\quad u^{(4)}_{yxxz} = 72x^2y^2z,$$

$$u'_z = 2x^4y^3z,\quad u''_{zx} = 8x^3y^3z,\quad u'''_{zxy} = 24x^3y^2z,\quad u^{(4)}_{zxyx} = 72x^2y^2z.$$

2) Мы имели уже [п° 138,2)] частные производные для функции $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

вычислим теперь дальнейшие производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$$

и т. д.

147. Теоремы о смешанных производных. При рассмотрении примеров 1) и 2) бросается в глаза совпадение смешанных производных, взятых по одним и тем же переменным, но в разном порядке.

Нужно сразу же отметить, что это вовсе не вытекает с необходимостью из определения смешанных производных, так как существуют случаи, когда упомянутого совпадения нет.

Для примера рассмотрим функцию

$$f(x, y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad (\text{при } x^2+y^2>0),\quad f(0, 0) = 0.$$

Имеем:

$$f'_x(x, y) = y\cdot\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\quad (\text{при } x^2+y^2>0),$$

$$f'_x(0, 0) = 0.$$

Если придать x частное значение, равное нулю, то при любом y (в том числе и при $y=0$) будем иметь: $f'_x(0, y) = -y$. Продифференцировав эту функцию по y, получим $f''_{xy}(0, y) = -1$. Отсюда следует, в частности, что

и в точке (0, 0) будем иметь:

$$f''_{xy}(0, 0) = -1.$$

Вычислив таким же образом f''_{yx} в точке (0, 0), получим

$$f''_{yx}(0, 0) = 1.$$

Итак, для рассматриваемой функции $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Тем не менее, подмеченное на примерах совпадение смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирований, не случайно: оно имеет место в широком классе случаев.

Теорема. *Предположим, что*: 1) *функция* $f(x, y)$ *определена в (открытой) области* $\mathcal{D}$, 2) *в этой области существуют первые производные* f'_x *и* f'_y, *а также вторые* *смешанные* *производные* f''_{xy} *и* f''_{yx}, *и, наконец,* 3) *эти последние производные* f''_{xy} *и* f''_{yx}, *как функции* x *и* y, *непрерывны в некоторой точке* (x_0, y_0) *области* $\mathcal{D}$. *Тогда в этой точке*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$W = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk},$$

где h, k отличны от нуля, например, положительны, и притом настолько малы, что в $\mathcal{D}$ содержится весь прямоугольник $[x_0, x_0+h; y_0, y_0+k]$; такими мы их фиксируем до конца рассуждения.

Введем теперь вспомогательную функцию от x:

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k},$$

которая в промежутке $[x_0, x_0+h]$, в силу 2), имеет производную

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x, y_0)}{k}$$

и, следовательно, непрерывна. С помощью этой функции выражение W, которое равно

$$W = \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}\right],$$

можно переписать в виде:

$$W = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Так как для функции $\varphi(x)$ в промежутке $[x_0, x_0+h]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа [n° **102**], то мы можем, по формуле конечных приращений, преобразовать выражение W так:

$$W = \varphi'(x_0+\theta h) = \frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k}$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Пользуясь существованием второй производной $f''_{xy}(x, y)$, снова применим формулу конечных приращений, на этот раз — к функции от y: $f'_x(x_0+\theta h, y)$ в промежутке $[y_0, y_0+k]$. Окончательно получим:

$$W = f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k) \qquad (0<\theta,\ \theta_1<1). \tag{2}$$

Но выражение W содержит x и h, с одной стороны, и y и k, с другой, одинаковым образом. Поэтому можно поменять их роли и, введя вспомогательную функцию

$$\psi(y) = \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h},$$

путем аналогичных рассуждений получить результат:

$$W = f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_2,\ \theta_3<1). \tag{3}$$

Из сопоставления (3) и (4) находим:

$$f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta,\ k) = f''_{yx}(y_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k).$$

Устремив теперь h и k к нулю, перейдем в этом равенстве к пределу. Ввиду ограниченности множителей θ, θ_1, θ_2, θ_3, аргументы и справа и слева стремятся, соответственно, к x_0, y_0. А тогда, в силу 3), окончательно и получим:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, *непрерывные смешанные производные* f''_{xy} *и* f''_{yx} *всегда равны.*

В приведенном выше примере эти производные

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\} \qquad (x^2+y^2>0)$$

не имеют вовсе предела при $x\to 0$, $y\to 0$ и, следовательно, в точке (0, 0) терпят разрыв: к этому случаю наша теорема, естественно, неприложима.

Замечание. Упоминание о равенстве смешанных производных и попытки доказать его находим еще у Эйлера и Клеро *) (1740). Строгое доказательство впервые дал Шварц **) лишь в 1873 г.

---

*) Алексис Клод Клеро (1713—1765) — выдающийся французский математик.

**) Карл Герман Армандуа Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

Отметим связь вопроса о перестановке двух дифференцирований с общим вопросом о перестановке двух предельных переходов, рассмотренным в п° **131**.

Имеет место и общая теорема о смешанных производных:

Теорема. *Пусть функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от m переменных определена в открытой m-мерной области $\mathcal{D}$ и имеет в этой области всевозможные частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно и смешанные производные n-го порядка, причем все эти производные непрерывны в $\mathcal{D}$.*

При этих условиях значение любой n-й смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Мы не будем останавливаться на ее доказательстве, которое проводится на основе предыдущей теоремы.

Так как непрерывность производных мы впредь всегда будем предполагать, то для нас порядок последовательных дифференцирований будет безразличен. При пользовании смешанной производной мы обычно будем собирать вместе дифференцирования по одной и той же переменной.

148. Дифференциалы высших порядков. Пусть в области $\mathcal{D}$ задана некоторая функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда, как мы знаем, (полным) дифференциалом du называется следующее выражение:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m,$$

где $dx_1, \ldots, dx_m$ — произвольные приращения независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Мы видим, что du также является некоторой функцией от $x_1, \ldots, x_m$. Если предположить существование непрерывных частных производных второго порядка для u, то du будет иметь непрерывные частные производные первого порядка, и можно говорить о полном дифференциале от этого дифференциала du, $d(du)$, который называется дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от u; он обозначается символом d^2u.

Важно подчеркнуть, что приращения $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ при этом рассматриваются как постоянные и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему (вторые дифференциалы $d^2x_1, d^2x_2, \ldots, d^2x_m$ будут нулями!).

Таким образом, если воспользоваться известными правилами дифференцирования п° **143**, будем иметь:

$$d^2u=d\,(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m\right)=$$
$$=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2+\ldots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\cdot dx_m$$

или, раскрывая:

$$d^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m\right) \cdot dx_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m} dx_m\right) \cdot dx_2 +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} dx_m\right) \cdot dx_m =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} dx_m^2 +$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \ldots$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m.$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка d^3u, и т. д. Вообще, если дифференциал $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}u$ уже определен, то дифференциал n-го порядка $d^n u$ определяется как (полный) дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^n u = d\,(d^{n-1}u).$$

Если для функции u существуют непрерывные частные производные всех порядков до n-го порядка включительно, то существование этого n-го дифференциала обеспечено. Но развернутые выражения последовательных дифференциалов становятся все более и более сложными. В целях упрощения их записи прибегают к следующему приему.

Прежде всего, в выражении первого дифференциала *условно* «вынесем букву u за скобки»; тогда его *символически* можно будет записать следующим образом:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right) \cdot u.$$

Теперь замечаем, что если в выражении для второго дифференциала также «вынести u за скобки», то остающееся в скобках выражение *формально* представляет в раскрытом виде квадрат выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m;$$

поэтому второй дифференциал символически можно записать так:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 \cdot u.$$

Аналогично можно записать третий дифференциал и т. д. Это правило — общее: при всяком n будем иметь символическое равенство

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n \cdot u, \tag{4}$$

которое надлежит понимать так: сначала «многочлен», стоящий в скобках, формально возводится по правилам алгебры в степень, затем все полученные члены «умножаются» на u (которое дописывается в числителях при ∂^n), и только после этого всем символам возвращается их значение как производных и дифференциалов.

Доказательство правила (4) можно осуществить по методу математической индукции.

Таким образом, n-й дифференциал является однородным целым многочленом степени n, или, как говорят, является формой n-й степени относительно дифференциалов независимых переменных, коэффициентами при которых служат частные производные n-го порядка, умноженные на целочисленные постоянные («полиномиальные» коэффициенты).

Например, если $u = f(x, y)$, то

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3,$$

$$d^4u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y} dx^3\,dy + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} dx^2\,dy^2 + {}$$
$$+ 4\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^3} dx\,dy^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} dy^4,$$

и т. д. Положив конкретно $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, будем иметь

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}, \qquad d^2u = \frac{2xy\,(dy^2 - dx^2) + 2\,(x^2 - y^2)\,dx\,dy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$d^3u = \frac{(6x^2y - 2y^3)\,dx^3 + (18xy^2 - 6x^3)\,dx^2\,dy}{(x^2 + y^2)^3} + {}$$
$$+ \frac{(6y^3 - 18x^2y)\,dx\,dy^2 + (2x^3 - 6xy^2)\,dy^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

и т. д.

149. Дифференциалы сложных функций. Пусть мы теперь имеем сложную функцию:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

где, в свою очередь,

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

В этом случае первый дифференциал может быть сохранен в прежнем виде:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

(на основании инвариантности формы первого дифференциала, n°143). Но здесь уже $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ являются дифференциалами не независимых переменных, а функций и, следовательно, сами будут функциями и могут не быть постоянными, как в предыдущем случае.

Вычислив теперь второй дифференциал нашей функции, будем иметь (если воспользоваться правилами дифференцирования n°143):

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \cdot dx_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) \cdot dx_m +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d(dx_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot d(dx_2) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d(dx_m) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 \cdot u +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d^2x_m.$$

Мы видим, что для дифференциала порядка выше первого инвариантность формы вообще не имеет места.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются линейными функциями от $t_1, t_2, \ldots, t_k$, т. е. когда

$$x_i = \alpha_i^{(1)} t_1 + \alpha_i^{(2)} t_2 + \ldots + \alpha_i^{(m)} t_m + \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\alpha_i^{(j)}$ и β_i — постоянные.

В этом случае будем иметь

$$dx_i = \alpha_i^{(1)} dt_1 + \ldots + \alpha_i^{(m)} dt_m = \alpha_i^{(1)} \Delta t_1 + \ldots + \alpha_i^{(m)} \Delta t_m.$$

Мы видим, что все первые дифференциалы функций $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в этом случае постоянны, не зависят от $t_1, t_2, \ldots, t_k$; следовательно, применимы без изменений выкладки n°148. Отсюда вытекает, что *в случае замены независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейными функциями от новых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$, могут быть сохранены прежние выражения даже для дифференциалов высших порядков.* В них дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ совпадают с приращениями $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$, но эти приращения не произвольны, а обусловливаются приращениями $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_k$.

Это простое и важное замечание принадлежит Коши; мы используем его непосредственно в следующем номере.

150. Формула Тейлора. Мы уже знаем [n°107, (12б)], что функция $F(t)$, при условии существования ее $n+1$ первых производных,

может быть следующим образом разложена по формуле Тейлора:

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!} d^2F(t_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^nF(t_0) + \\ + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(t_0 + \theta \Delta t) \quad (0 < \theta < 1).$$

При этом важно подчеркнуть, что величина dt, входящая в различных степенях в выражения дифференциалов справа, в точности равна тому приращению Δt, которое фигурирует в приращении функции слева:

$$\Delta F(t_0) = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0).$$

Именно в последней форме формула Тейлора распространяется и на случай функции от нескольких переменных (Коши).

Для упрощения письма ограничимся функцией $f(x, y)$ двух переменных.

Предположим, что в окрестности некоторой определенной точки (x_0, y_0) эта функция имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Придадим x_0 и y_0 некоторые приращения Δx и Δy так, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, не вышел за пределы рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0).

Требуется доказать, что при сделанных предположениях относительно функции $f(x, y)$ справедливо следующее равенство:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^nf(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \quad (5) \\ (0 < \theta < 1),$$

причем фигурирующие справа в различных степенях дифференциалы dx и dy равны именно тем приращениям Δx и Δy независимых переменных, которые породили приращение функции слева.

Для доказательства введем в рассмотрение новую независимую переменную t, положив

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x, \quad y = y_0 + t \cdot \Delta y. \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \quad (6)$$

Подставив эти значения x и y в функцию $f(x, y)$, получим *сложную* функцию от одной переменной t:

$$F(t) = f(x_0 + t \cdot \Delta x, y_0 + t \cdot \Delta y).$$

Мы знаем, что введенные нами в рассмотрение формулы (6) геометрически выражают прямолинейный отрезок, соединяющий точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Очевидно, вместо приращения

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

мы можем рассматривать приращение вспомогательной функции:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0),$$

так как оба приращения равны. Но $F(t)$ является функцией от одной переменной и имеет $(n+1)$ непрерывных производных; следовательно, применив к ней уже выведенную ранее формулу Тейлора, получим:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!} d^2F(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!} d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(\theta) \qquad (0 < \theta < 1), \qquad (7)$$

при этом дифференциал dt, входящий в различных степенях справа, равен $\Delta t = 1 - 0 = 1$.

Теперь, пользуясь тем, что при линейной замене переменных свойство инвариантности формы имеет место и для высших дифференциалов, получим

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy = df(x_0, y_0),$$
$$d^2F(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot dx\, dy +$$
$$+ f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot dy^2 = d^2f(x_0, y_0),$$

и т. д. Наконец, для $(n+1)$-го дифференциала будем иметь:

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Важно отметить, что здесь дифференциалы dx и dy ничем не отличаются от ранее взятых приращений Δx и Δy. Действительно, так как $dt = 1$,

$$dx = \Delta x \cdot dt = \Delta x, \qquad dy = \Delta y \cdot dt = \Delta y.$$

Подставив все это в разложение (7), мы и придем к требуемому разложению (5).

Читатель должен дать себе отчет в том, что, хотя в дифференциальной форме формула Тейлора для случая функции нескольких переменных имеет такой же простой вид, как и для случая функции одной переменной, но в развернутом виде она гораздо сложнее.

§ 3. ЭКСТРЕМУМЫ, НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

151. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия. Пусть функция

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

определена в области $\mathscr{D}$ и $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ будет внутренней точкой этой области.

Говорят, что *функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *в точке* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ *имеет максимум (минимум), если ее можно окружить такой окрестностью*

$$(x_1^0-\delta_1,\ x_1^0+\delta_1;\ x_2^0-\delta_2,\ x_2^0+\delta_2;\ \ldots;\ x_m^0-\delta_m,\ x_m^0+\delta_m),$$

чтобы для всех точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\leqslant f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0).$$
$$(\geqslant)$$

Если эту окрестность можно взять настолько малой, чтобы знак равенства был исключен, т. е. чтобы в каждой точке ее, кроме самой точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, выполнялось строгое неравенство

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)<f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0),$$
$$(>)$$

то говорят, что в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ имеет место собственный максимум (минимум); в противном случае, максимум (минимум) называется несобственным.

Для обозначения максимума и минимума употребляется и общий термин — экстремум.

Предположим, что наша функция в некоторой точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ имеет экстремум.

Покажем, что если в этой точке существуют конечные частные производные

$$f'_{x_1}(x_1^0,\ \ldots,\ x_m^0),\ \ldots,\ f'_{x_m}(x_1^0,\ \ldots,\ x_m^0),$$

то все эти частные производные равны нулю, так что *обращение в нуль частных производных первого порядка является необходимым условием существования экстремума*

С этой целью положим $x_2=x_2^0, \ldots, x_m=x_m^0$, сохраняя x_1 переменным; тогда у нас получится функция от одной переменной x_1:

$$u=f(x_1,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0).$$

Так как мы предположили, что в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ существует экстремум (для определенности — пусть это будет максимум), то, в частности, отсюда следует, что в некоторой окрестности $(x_1^0-\delta_1,\ x_1^0+\delta_1)$ точки $x_1=x_1^0$ необходимо должно выполняться неравенство

$$f(x_1,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0)\leqslant f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0),$$

так что упомянутая выше функция одной переменной в точке $x_1 = x_1^0$ будет иметь максимум, а отсюда по теореме Ферма [n° 100] следует, что

$$f'_{x_1}(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0) = 0.$$

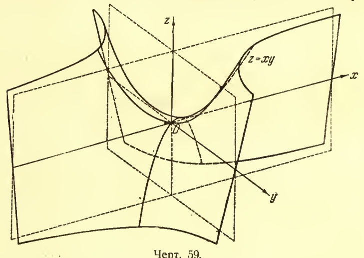
Таким же образом можно показать, что в точке $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0)$ и остальные частные производные также равны нулю.

Итак, «подозрительными» по экстремуму являются те точки, в которых частные производные первого порядка все обращаются в нуль; их координаты можно найти, решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) &= 0, \\ f'_{x_2}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ f'_{x_m}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Как и в случае функции одной переменной, подобные точки называют **стационарными**.

152. Исследование стационарных точек (случай двух переменных). Как и в случае функции одной переменной, в стационарной точке вовсе не обеспечено наличие экстремума. Если для примера



Черт. 59.

взять простую функцию $z = xy$, то для нее $z'_x = y$ и $z'_y = x$ обращаются одновременно в нуль в единственной — начальной точке $(0, 0)$, в которой $z = 0$. В то же время непосредственно ясно, что в любой окрестности этой точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, и экстремума нет. На черт. 59 изобра-

жена поверхность (гиперболический параболоид), выражаемая уравнением $z = xy$; вблизи начальной точки она имеет седлообразную форму, изгибаясь в одной вертикальной плоскости вверх, а в другой — вниз.

Таким образом, встает вопрос об условиях, *достаточных* для существования (или отсутствия) экстремума, о том *исследовании*, которому должна быть дополнительно подвергнута стационарная точка.

Мы ограничимся случаем функции двух переменных $f(x, y)$. Предположим, что эта функция определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), которая является стационарной, т. е. удовлетворяет условиям

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{1a}$$

Чтобы установить, действительно ли наша функция имеет в точке (x_0, y_0) экстремум или нет, естественно обратиться к рассмотрению разности

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Разложим ее по формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа [n° **150**, (5)], ограничиваясь двумя членами. Впрочем, так как точка (x_0, y_0) предположена стационарной, то первый член исчезает, и мы будем иметь просто

$$\Delta = \frac{1}{2!}\{f''_{x^2} \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy} \cdot \Delta x\, \Delta y + f''_{y^2} \cdot \Delta y^2\}. \tag{2}$$

При этом роль приращений Δx, Δy играют разности $x - x_0$, $y - y_0$ и производные все вычислены в некоторой точке

$$(x_0 + \theta\,\Delta x, \quad y_0 + \theta\,\Delta y).$$

Введем в рассмотрение значения этих производных в самой испытуемой точке:

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0) \tag{3}$$

и положим

$$f''_{x^2}(x_0 + \theta\,\Delta x, \quad y_0 + \theta\,\Delta y) = a_{11} + \alpha_{11},$$
$$f''_{xy}(\ldots) = a_{12} + \alpha_{12}, \quad f''_{y^2}(\ldots) = a_{22} + \alpha_{22},$$

так что, ввиду непрерывности вторых производных,

$$\text{все } \alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0. \tag{4}$$

Разность Δ напишется в виде:

$$\Delta = \frac{1}{2}\{a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\,\Delta y + a_{22}\Delta y^2 + \\ + \alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\,\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\}.$$

Как мы установим, поведение разности Δ существенно зависит от знака выражения $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$.

Для облегчения рассуждений положим теперь $\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\rho\sin\varphi$, где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ есть расстояние между точками (x_0, y_0) и (x, y). Тогда, окончательно,

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+ \\ +\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi\}.$$

1°. Пусть, сначала, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$.

В этом случае $a_{11}a_{22}>0$, так что $a_{11}\neq 0$, и первый трехчлен в скобках $\{\ldots\}$ может быть представлен так:

$$\frac{1}{a_{11}}[(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\sin^2\varphi]. \tag{5}$$

Отсюда ясно, что выражение в скобках $[\ldots]$ всегда положительно, так что *упомянутый трехчлен при всех значениях* φ, *не обращаясь в нуль, сохраняет знак коэффициента* a_{11}. Его абсолютная величина, как непрерывная в промежутке $[0, 2\pi]$ функция от φ, имеет (очевидно, *положительное*) наименьшее значение m:

$$|a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi|\geqslant m>0.$$

С другой стороны, если обратиться ко *второму* трехчлену в скобках $\{\ldots\}$, то, ввиду (4),

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi|\leqslant|\alpha_{11}|+2|\alpha_{12}|+|\alpha_{22}|<m$$

сразу для всех φ, если только ρ (а с ним и Δx, Δy) достаточно мало. Но тогда всё выражение в скобках $\{\ldots\}$, а значит и разность Δ, будет сохранять тот же знак, что и первый из трехчленов, т. е. знак a_{11}.

Итак, если $a_{11}>0$, то и $\Delta>0$, т. е. функция в рассматриваемой точке (x_0, y_0) имеет *минимум*, а при $a_{11}<0$ будет и $\Delta<0$, т. е. налицо *максимум*.

2°. Предположим теперь, что $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$.

Остановимся на случае, когда $a_{11}\neq 0$; тогда можно и здесь использовать преобразование (5). При $\varphi=\varphi_1=0$ выражение в скобках $[\ldots]$ будет *положительно*, ибо сведется к a_{11}^2. Наоборот, если определить $\varphi=\varphi_2$ из условия

$$a_{11}\cos\varphi_2+a_{12}\sin\varphi_2=0 \qquad (\sin\varphi_2\neq 0),$$

то это выражение сведется к $(a_{11}a_{22}-a_{12})^2\sin^2\varphi_2$ и будет *отрицательно*. При достаточно малом ρ второй трехчлен в скоб-

ках $\{\ldots\}$, как при $\varphi=\varphi_1$, так и при $\varphi=\varphi_2$, будет сколь угодно мал, и знак Δ определится знаком первого трехчлена. Таким образом, в любой близости от рассматриваемой точки (x_0, y_0) на лучах, определяемых углами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, разность Δ будет иметь значения противоположных знаков. Следовательно, в этой точке экстремума быть не может.

Если $a_{11}=0$, и первый трехчлен в скобках $\{\ldots\}$ сведется к

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi=\sin\varphi\cdot(2a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi),$$

то, пользуясь тем, что наверное $a_{12}\neq 0$, можно определить угол $\varphi_1\neq 0$ так, что

$$|a_{22}||\sin\varphi_1|<2|a_{12}||\cos\varphi_1|.$$

Тогда при $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2=-\varphi_1$ упомянутый трехчлен будет иметь противоположные знаки, и рассуждение завершается, как и выше.

Итак, *если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, то в испытуемой стационарной точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум, именно, максимум при $a_{11}<0$ и минимум при $a_{11}>0$. Если же $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, то экстремума нет.*

В случае же $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ для решения вопроса приходится привлекать высшие производные; этот «сомнительный» случай мы оставим в стороне.

Замечание. Эйлер первым отметил необходимость условий

$$f'_x(x_0, y_0)=0; \quad f'_y(x_0, y_0)=0$$

для того, чтобы функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имела экстремум. Однако он ошибался, думая, что достаточным условием является наличие для функции однотипного экстремума по каждой переменной в отдельности (что будет иметь место, например, если производные f''_{x^2} и f''_{y^2} — одного знака). Лагранж понял ошибку Эйлера и в качестве достаточного условия установил неравенство

$$f''_{x^2}\cdot f''_{y^2}-(f''_{xy})^2>0.$$

Он же указал, что обратное неравенство обусловливает отсутствие экстремума, но обосновал это неполностью.

Примеры. 1) Исследуем на максимум и минимум функцию

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \qquad (p>0, \quad q>0).$$

Вычислим частные производные:

$$z'_x=\frac{x}{p}, \quad z'_y=\frac{y}{q}.$$

Отсюда сразу видим, что единственной стационарной точкой является начало координат (0, 0).

Вычислив a_{11}, a_{12} и a_{22}, получим

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{q};$$

отсюда $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Следовательно, в точке (0, 0) функция z имеет минимум: впрочем, это ясно и непосредственно.

Геометрическим образом нашей функции будет эллиптический параболоид с вершиной в начальной точке (ср. черт. 55 на стр. 220).

2) $$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0,\ q > 0);$$

имеем $$z'_x = \frac{x}{p}, \quad z'_y = -\frac{y}{q}.$$

И здесь видим, что стационарной точкой является (0, 0).

Вычисляем

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -\frac{1}{q};$$

отсюда $a_{11}a_{12} - a_{12}^2 < 0$. Следовательно, экстремума нет.

Геометрически мы здесь имеем дело с гиперболическим параболоидом, вершина которого — в начале координат.

3) $$z = y^2 + x^4 \quad \text{или} \quad z = y^2 + x^3;$$

в обоих случаях стационарной является точка (0, 0) и в ней $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Наш критерий не дает ответа; при этом в первом случае, как непосредственно видно, налицо минимум, а во втором — экстремума нет.

153. Наибольшее и наименьшее значения функции. Примеры. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$ и имеет в этой области конечные частные производные. По теореме Вейерштрасса [n° **136**], в этой области найдется точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, в которой функция получает наибольшее (наименьшее) из всех значений. Если точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ лежит внутри области $\mathcal{D}$, то в ней функция, очевидно, имеет максимум (минимум), так что в этом случае интересующая нас точка наверное содержится среди «подозрительных» по экстремуму стационарных точек. Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция u может достигать и на границе области. Поэтому, *для того чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в области $\mathcal{D}$, нужно найти все внутренние стационарные точки, «подозрительные» по экстремуму, вычислить значения функции в них и сравнить со значениями функции в пограничных точках области: наибольшее (наименьшее) из этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области.*

Поясним сказанное примерами.

1) Пусть требуется найти наибольшее значение функции

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

в треугольнике, ограниченном осью x, осью y и прямой $x+y=2\pi$ (черт. 60). Имеем

$$u'_x = \cos x - \cos(x+y), \quad u'_y = \cos y - \cos(x+y).$$

Внутри области производные обращаются в нуль в единственной точке $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, в которой $u=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Так как на границе области, т. е. на прямых $x=0$, $y=0$ и $x+y=2\pi$ наша функция равна нулю, то, очевидно, найденная выше точка $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ и доставляет функции наибольшее значение.

Черт. 60.

2) Найти наибольшее значение для произведения

$$u = xyzt$$

неотрицательных чисел x, y, z, t при условии, что сумма их сохраняет постоянную величину:

$$x+y+z+t=4c.$$

Покажем, что наибольшее для u значение получится, когда множители все равны: $x=y=z=t=c$ *).

Определив t из данного условия: $t=4c-x-y-z$, подставим в u это выражение:

$$u = xyz(4c-x-y-z).$$

Мы имеем здесь функцию от трех независимых переменных x, y, z в трехмерной области, определяемой условиями

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x+y+z \leqslant 4c.$$

Геометрически эта область представляется в виде тетраэдра, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4c$.

Вычисляем производные и приравниваем их нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz(4c-2x-y-z)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx(4c-x-2y-z)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy(4c-x-y-2z)=0.$$

Внутри области уравнения эти удовлетворяются лишь в точке $x=y=z=c$, в которой $u=c^4$. Так как на границе области $u=0$, то в найденной точке, действительно, достигается для функции наибольшее значение.

Утверждение наше доказано, ибо при $x=y=z=c$ также и $t=c$ **).

*) Мы лишь для определенности взяли число сомножителей равным четырем; результат будет тот же для любого числа сомножителей.

**) Из сказанного следует, что произведение положительных чисел $xyzt$, сумма которых равна $4c$, не превосходит c^4, так что

$$\sqrt[4]{xyzt} \leqslant c = \frac{x+y+z+t}{4},$$

т. е. среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического. Это справедливо для любого количества чисел.

Замечание. В приведенных примерах внутри рассматриваемой области существовала одна лишь стационарная точка. Можно было бы удостовериться, что в ней налицо максимум. Однако, в отличие от того, что было отмечено для случая функции одной переменной (см. замечание в n° **118**), *здесь из этого одного нельзя было бы сделать заключение, что мы имеем дело с наибольшим значением функции в области.*

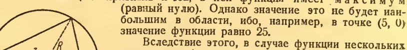
Следующий простой пример показывает, что подобное заключение в действительности может привести к неверному результату. Рассмотрим в прямоугольнике $[-5, 5; -1, 1]$ функцию

$$u = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2.$$

Ее производные

$$u'_x = 3x^2 - 8x + 2y, \quad u'_y = 2x - 2y$$

в пределах области обращаются в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Как легко убедиться с помощью признака n°**152**, в ней функция имеет максимум (равный нулю). Однако значение это не будет наибольшим в области, ибо, например, в точке $(5, 0)$ значение функции равно 25.



Черт. 61.

Вследствие этого, в случае функции нескольких переменных (при разыскании наибольшего или наименьшего значения функции в области) исследование на максимум и минимум оказывается практически ненужным.

154. Задачи. Многие задачи — как из области математики, так и из других областей науки и техники — приводят к вопросу о нахождении наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

Решение задач 1) и 2) связано с уже рассмотренными в предыдущем номере примерами.

1) Среди всех вписанных в данный круг радиуса R треугольников найти тот, площадь которого наибольшая (черт. 61).

Если через x, y, z обозначить центральные углы, опирающиеся на стороны треугольника, то они связаны зависимостью $x + y + z = 2\pi$, откуда $z = 2\pi - x - y$. Площадь треугольника P выражается через них так:

$$P = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x + \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin z =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \cdot [\sin x + \sin y - \sin (x + y)].$$

Область изменения переменных x и y здесь определяется условиями $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2\pi$. Нужно найти те значения переменных, которые сообщают выражению в скобках наибольшую величину.

Мы уже знаем [n° **153**, 1)], что это будут $x = y = \frac{2\pi}{3}$, так что и $z = \frac{2\pi}{3}$: получается равносторонний треугольник.

2) Среди всех треугольников данного периметра $2p$ найти тот, площадь которого P наибольшая.

Пусть x, y, z означают стороны треугольника; тогда по известной формуле

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Можно было бы, подставив сюда $z = 2p - x - y$, преобразовать P к виду

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(2p-x-y)}$$

и искать наибольшее значение этой функции в треугольной области, о которой уже была речь в п° 124, 5).

Мы поступим иначе: задача сводится к нахождению наибольшего значения для произведения положительных чисел

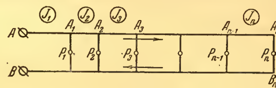
$$u=(p-x)(p-y)(p-z)$$

— при условии, что их сумма постоянна:

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-2p=p.$$

А мы уже знаем [п° 153, 2)], что для этого все множители должны быть равны, так что $x=y=z=\frac{2p}{3}$: снова получается равносторонний треугольник.

3) Рассмотрим электрическую питательную сеть с параллельным включением. На черт. 62 представлена схема сети, причем A и B —



Черт. 62.

зажимы источника тока и $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — приемники тока, потребляющие, соответственно, токи $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Требуется, при наперед заданном допустимом общем падении потенциала в цепи $2e$, определить сечения проводов так, чтобы на всю магистраль пошло наименьшее количество меди.

Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением одного из проводов, скажем AA_n, так как другой провод находится в совершенно аналогичных условиях. Обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_n$ длины частей $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ (в метрах), через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — площади их поперечных сечений (в кв. миллиметрах). Тогда выражение

$$u=l_1q_1+l_2q_2+\ldots+l_nq_n$$

как раз и представит объем всей затраченной меди (в куб. сантиметрах); для него нам нужно добиться наименьшей величины, принимая во внимание, что общее падение потенциала в проводе AA_n должно равняться e.

Легко подсчитать, какие токи $J_1, J_2, \ldots, J_n$ будут протекать в отрезках $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ цепи:

$$J_1=i_1+i_2+\ldots+i_n, \quad J_2=i_2+\ldots+i_n, \ldots, \quad J_n=i_n.$$

Если обозначить через ρ сопротивление медной проволоки длиной в 1 *м* и с сечением в 1 *мм*², то сопротивления этих отрезков будут

$$r_1=\frac{\rho l_1}{q_1}, \quad r_2=\frac{\rho l_2}{q_2}, \ldots, \quad r_n=\frac{\rho l_n}{q_n},$$

так что соответствующие падения потенциала в этих отрезках, согласно закону Ома, выразятся так:

$$e_1=r_1J_1=\frac{\rho l_1J_1}{q_1}, \quad e_2=r_2J_2=\frac{\rho l_2J_2}{q_2}, \ldots, \quad e_n=r_nJ_n=\frac{\rho l_nJ_n}{q_n}.$$

Чтобы избежать сложных выкладок, мы, вместо переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, введем именно эти величины $e_1, e_2, \ldots, e_n$, связанные простым условием $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = e$, откуда $e_n = e - e_1 - e_2 - \ldots - e_{n-1}$. Тогда, в свою очередь,

$$q_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{e_1}, \quad q_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{e_2}, \ldots, \quad q_n = \frac{\rho l_n J_n}{e_n} = \frac{\rho l_n J_n}{e - e_1 - e_2 - \ldots - e_{n-1}}$$

и

$$u = \rho\left[\frac{l_1^2 J_1}{e_1} + \frac{l_2^2 J_2}{e_2} + \ldots + \frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}} + \frac{l_n^2 J_n}{e - e_1 - e_2 - \ldots - e_{n-1}}\right],$$

причем область изменения н е з а в и с и м ы х переменных $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ определяется неравенствами

$$e_1 > 0, \quad e_2 > 0, \ldots, \quad e_{n-1} > 0, \quad e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1} < e.$$

Приравнивая нулю производные u по всем переменным, получим систему уравнений

$$-\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \ldots - e_{n-1})^2} = 0,$$

$$-\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \ldots - e_{n-1})^2} = 0, \ldots$$

$$\ldots, \quad -\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \ldots - e_{n-1})^2} = 0,$$

откуда (снова вводя e_n)

$$\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} = \frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} = \ldots = \frac{l_n^2 J_n}{e_n^2}.$$

Удобно обозначить общую величину всех этих отношений через $\frac{1}{\lambda^2}$ $(\lambda > 0)$. Тогда

$$e_1 = \lambda l_1 \sqrt{J_1}, \quad e_2 = \lambda l_2 \sqrt{J_2}, \ldots, \quad e_n = \lambda l_n \sqrt{J_n},$$

причем λ легко определяется из условия $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = e$:

$$\lambda = \frac{e}{l_1 \sqrt{J_1} + l_2 \sqrt{J_2} + \ldots + l_n \sqrt{J_n}}.$$

Наконец, возвращаясь к нашим основным переменным $q_1, q_2, \ldots, q_n$, находим

$$q_1 = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{J_1}, \quad q_2 = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{J_2}, \ldots, \quad q_n = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{J_n},$$

так что наивыгоднейшие сечения проводов оказываются пропорциональными корням квадратным из соответствующих сил тока.

З а м е ч а н и е. Так как в данном случае область изменения переменных $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ — о т к р ы т а я, то непосредственно вторая теорема Вейерштрасса [n° 136] неприложима. Учтем, однако, что граница области определяется соотношениями

$$e_1 \geqslant 0, \quad e_2 \geqslant 0, \ldots, \quad e_{n-1} \geqslant 0, \quad e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1} \leqslant e,$$

где хоть в одном случае имеет место р а в е н с т в о. Тогда, при приближении точки $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ к границе, величина u растет до бесконечности. Отсюда уже можно заключить, что найденные значения $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ действительно доставляют функции u наименьшее значение.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

§ 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ

155. Понятие первообразной функции (и неопределенного интеграла). Во многих вопросах науки и техники приходится восстанавливать функцию по известной ее производной.

В n°**78**, предполагая известным уравнение движения $s = f(t)$, т. е. закон изменения пути с течением времени, мы путем дифференцирования нашли сначала скорость $v = \frac{ds}{dt}$, а затем и ускорение $a = \frac{dv}{dt}$. На деле, однако, часто приходится решать обратную задачу: ускорение a задано в функции от времени t: $a = a(t)$, требуется определить скорость v и пройденный путь s в зависимости от t. Таким образом, здесь оказывается нужным по функции $a = a(t)$ восстановить ту функцию $v = v(t)$, для которой a является производной, а затем, зная функцию v, найти ту функцию $s = s(t)$, для которой производной будет v.

Аналогично, зная массу $m = m(x)$, непрерывно распределенную вдоль прямолинейного отрезка $[0, x]$ оси x, в n°**78** дифференцированием мы нашли «линейную» плотность $\rho = \rho(x)$. Но естественно возникает вопрос, как по заданному закону изменения плотности $\rho = \rho(x)$ найти величину самой распределенной массы, т. е. опять-таки по известной функции $\rho(x)$ найти ту функцию $m = m(x)$, для которой ρ служит производной.

*Функция $F(x)$ в данном промежутке $\mathcal{X}$ называется первообразной функцией *) для функции $f(x)$ или интегралом от $f(x)$, если во всем этом промежутке $f(x)$ является производной*

---

*) И термин «первообразная» (или «примитивная») функция принадлежит Лагранжу. (См. сноску на стр. 144.)

для функции $F(x)$ *или, что то же,* $f(x)\,dx$ *служит для* $f(x)$ *дифференциалом*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad dF(x) = f(x)\,dx\,^{*}).$$

Разыскивание для функции всех ее первообразных, называемое интегрированием ее, и составляет одну из задач *интегрального исчисления*; как видим, эта задача является обратной основной задаче дифференциального исчисления.

Теорема. *Если в некотором (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) промежутке* $\mathscr{X}$ *функция* $F(x)$ *есть первообразная для функции* $f(x)$, *то и функция* $F(x)+C$, *где* C *— любая постоянная, также будет первообразной. Обратно,* к а ж д а я *функция, первообразная для* $f(x)$ *в промежутке* $\mathscr{X}$, *может быть представлена в этой форме.*

Доказательство. То обстоятельство, что, наряду с $F(x)$, и $F(x)+C$ является первообразной для $f(x)$, вполне очевидно, ибо $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$.

Пусть теперь $\Phi(x)$ будет л ю б а я первообразная для $f(x)$ функция, так что в промежутке $\mathscr{X}$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Так как функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ в рассматриваемом промежутке имеют одну и ту же производную, то они разнятся на постоянную [n° **110**, следствие]:

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что достаточно найти для данной функции $f(x)$ только одну первообразную функцию $F(x)$, чтобы знать все первообразные, так как они отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми.

В силу этого *выражение* $F(x)+C$, *где* C *— произвольная постоянная, представляет собой* о б щ и й в и д *функции, которая имеет производную* $f(x)$ *или дифференциал* $f(x)\,dx$. Это выражение называется н е о п р е д е л е н н ы м и н т е г р а л о м $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx,$$

в котором неявным образом уже заключена произвольная постоянная. Произведение $f(x)\,dx$ называется п о д и н т е г р а л ь н ы м в ы р а ж е н и е м, а функция $f(x)$ — подинтегральной функцией.

*) В этом случае говорят также, что функция $F(x)$ является первообразной (или интегралом) для дифференциального выражения $f(x)\,dx$.

Пример. Пусть $f(x)=x^2$; тогда, как нетрудно видеть, неопределенный интеграл этой функции будет

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

Это легко проверить обратным действием — дифференцированием.

Обращаем внимание читателя на то, что под знаком «интеграла» $\int$ пишут дифференциал искомой первообразной функции, а не производную (в нашем примере: $x^2\,dx$, а не x^2). Такой способ записи, как будет выяснено ниже [n° **175**], создался исторически; к тому же он представляет ряд преимуществ, и его сохранение вполне целесообразно.

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие свойства:

1. $$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,$$

т. е. *знаки d и $\int$, когда первый помещен перед вторым, взаимно сокращаются.*

2. Так как $F(x)$ есть первообразная функция для $F'(x)$, то имеем

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C,$$

что может быть переписано так:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Отсюда видим, что знаки d и $\int$, *стоящие перед $F(x)$, сокращаются и тогда, когда d стоит после $\int$, но только к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную.*

Возвращаясь к той механической задаче, которую мы поставили вначале, мы можем теперь написать, что

$$v=\int a(t)\,dt \quad \text{и} \quad s=\int v(t)\,dt.$$

Предположим для определенности, что мы имеем дело с равноускоренным движением, например, под действием силы тяжести; тогда $a=g$ (если направление вертикали вниз считать положительным) и — как нетрудно сообразить —

$$v=\int g\,dt=gt+C.$$

Мы получили выражение для скорости v, в которое, кроме времени t, входит еще и произвольная постоянная C. При различных

значениях C мы будем получать и различные значения для скорости в один и тот же момент времени; следовательно, имеющихся у нас данных недостаточно для полного решения задачи. Чтобы получить вполне определенное решение задачи, достаточно знать величину скорости в один какой-нибудь момент времени. Например, пусть нам известно, что в момент $t = t_0$ скорость $v = v_0$; подставим эти значения в полученное выражение для скорости

$$v_0 = gt_0 + C, \quad \text{откуда} \quad C = v_0 - gt_0,$$

и теперь наше решение принимает уже вполне определенный вид:

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

Найдем, далее, выражение для пути s. Имеем

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0]\, dt = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$

(дифференцированием легко проверить, что первообразная функция может быть взята в такой форме). Неизвестную нам новую постоянную C' можно установить, если, например, дано, что путь $s = s_0$ в момент $t = t_0$; найдя, что $C' = s_0$, перепишем решение в окончательном виде

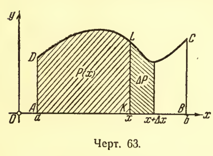
$$s = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

Значения t_0, s_0, v_0 условно называются *начальными значениями* величин t, s и v.

Точно так же можно написать:

$$m = \int \rho(x)\, dx.$$

И здесь при интегрировании появится постоянная C, которая на этот раз легко определяется из того условия, что при $x = 0$ и масса m должна обратиться в нуль.



Черт. 63.

156. Интеграл и задача об определении площади. Так как исторически понятие первообразной функции было теснейшим образом связано с задачей об определении площади, то мы остановимся на этой задаче уже здесь (пользуясь интуитивным представлением о площади плоской фигуры и откладывая точную постановку этого вопроса до главы XII).

Пусть дана в промежутке $[a, b]$ непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая лишь положительные (неотрицательные) значения. Рассмотрим фигуру $ABCD$ (черт. 63), ограниченную кривою $y = f(x)$,

двумя ординатами $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси x; подобную фигуру будем называть криволинейной трапецией. Желая определить величину площади P этой фигуры, мы изучим поведение площади переменной фигуры $AKLD$, заключенной между начальной ординатой $x=a$ и ординатой, отвечающей произвольно выбранному в промежутке $[a, b]$ значению x. При изменении x эта последняя площадь будет соответственно изменяться, причем каждому x отвечает вполне определенное ее значение, так что площадь криволинейной трапеции $AKLD$ является некоторой функцией от x; обозначим ее через $P(x)$.

Поставим себе сначала задачей найти производную этой функции. С этой целью придадим x некоторое (скажем, положительное) приращение Δx; тогда площадь $P(x)$ получит приращение ΔP.

Обозначим через m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $[x, x+\Delta x]$ [п° **73**] и сравним площадь $\Delta \boldsymbol{P}$ с площадями прямоугольников, построенных на основании Δx и имеющих высоты m и M. Очевидно,

$$m\,\Delta x < \Delta P < M\,\Delta x,$$

откуда

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

Если $\Delta x \to 0$, то, вследствие непрерывности, m и M будут стремиться к $f(x)$, а тогда и

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

Таким образом, мы приходим к замечательной теореме, обычно называемой теоремой Ньютона и Лейбница*): *производная от переменной площади $P(x)$ по конечной абсциссе равна конечной ординате $y=f(x)$.*

Иными словами, *переменная площадь $P(x)$ представляет собой первообразную функцию для данной функции $y=f(x)$.* В ряду других первообразных эта первообразная выделяется по тому признаку, что она обращается в нуль при $x=a$. Поэтому, если известна какая-либо первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$, и по теореме предыдущего номера

$$P(x) = F(x) + C,$$

то постоянную C легко определить, положив здесь $x=a$:

$$0 = F(a) + C, \text{ так что } C = -F(a).$$

Окончательно

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

---

*) В действительности это предложение — хотя и в другой форме — опубликовал еще Исаак Барроу (1630—1677), учитель Ньютона.

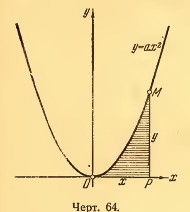
В частности, для получения площади P всей криволинейной трапеции $ABCD$ нужно взять $x = b$:

$$P = F(b) - F(a).$$

В виде примера, найдем площадь $P(x)$ фигуры, ограниченной параболой $y = ax^2$, ординатой, отвечающей данной абсциссе x, и отрезком оси x (черт. 64); так как в начале координат парабола касается оси x, то начальное значение x здесь равно нулю. Для функции $f(x) = ax^2$ легко найти первообразную: $F(x) = \frac{ax^3}{3}$. Эта функция как раз и обращается в нуль при $x = 0$, так что

$$P(x) = F(x) = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

[ср. п° 43,3)].



Черт. 64.

Ввиду той связи, которая существует между вычислением интегралов и нахождением площадей плоских фигур, т. е. квадратурой их, стало обычным и самое вычисление интегралов называть квадратурой.

Для распространения всего сказанного выше на случай функции, принимающей и отрицательные значения, достаточно условиться считать отрицательными площади частей фигуры, расположенных под осью x.

Таким образом, какова бы ни была непрерывная в промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$, читатель всегда может представить себе первообразную для нее функцию в виде переменной площади, ограниченной графиком данной функции. Однако считать эту геометрическую иллюстрацию доказательством существования первообразной, разумеется, нельзя, поскольку самое понятие площади еще не обосновано.

В следующей главе [п° 183] мы сможем дать строгое и притом чисто аналитическое доказательство того важного факта, что *каждая непрерывная в данном промежутке функция $f(x)$ имеет в нем первообразную*. Это утверждение мы принимаем уже сейчас.

В настоящей главе мы будем говорить о первообразных лишь для непрерывных функций. Если функция задана конкретно и имеет точки разрыва, то рассматривать ее будем лишь в промежутках ее непрерывности. Поэтому, допустив сформулированное выше утверждение, мы освобождаемся от необходимости всякий раз оговаривать существование интегралов: рассматриваемые нами интегралы все существуют.

157. Таблица основных интегралов. Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции

$F(x)$ производной будет $f(x)$, непосредственно приводит к соответствующей формуле интегрального исчисления

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Перебрав формулы n°81, по которым вычислялись производные элементарных функций, мы можем теперь составить следующую т а б л и ц у и н т е г р а л о в:

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$
3. $\int x^{\mu}\,dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ $\quad(\mu \neq -1)$
4. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
7. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C$
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

По поводу формулы 4 сделаем пояснение. Она приложима в любом промежутке, не содержащем нуля. Действительно, если этот промежуток лежит вправо от нуля, так что $x > 0$, то из известной формулы дифференцирования $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$ непосредственно следует

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Если же промежуток лежит влево от нуля и $x < 0$, то дифферен-

цированием легко убедиться в том, что $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$, откуда

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Обе эти формулы и объединены в формуле 4.

Рамки приведенной выше таблицы интегралов раздвигаются при помощи правил интегрирования.

158. Простейшие правила интегрирования. I. Если a — постоянная ($a \neq 0$), то

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$$

Действительно, дифференцируя выражение справа, мы получим [n°91, I]

$$d\left[a \cdot \int f(x)\,dx\right] = a \cdot d\left[\int f(x)\,dx\right] = a \cdot f(x)\,dx,$$

так что это выражение является первообразной для дифференциального выражения $a \cdot f(x)\,dx$, что и требовалось доказать.

Итак, *постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.*

II. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Дифференцируем выражение справа [n°91, II]:

$$d\left[\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right] = d\int f(x)\,dx \pm d\int g(x)\,dx = [f(x) \pm g(x)]\,dx;$$

таким образом, это выражение является первообразной функцией для последнего дифференциального выражения, что и требовалось доказать.

Неопределенный интеграл от суммы (разности) дифференциалов равен сумме (разности) интегралов от каждого дифференциала в отдельности.

Замечание. По поводу этих двух формул заметим следующее. В них входят неопределенные интегралы, содержащие каждый произвольное постоянное слагаемое. Равенства подобного типа понимаются в том смысле, что разность между правой и левой частью его есть постоянная. Можно понимать эти равенства и буквально, но тогда один из фигурирующих в них интегралов перестает быть произвольной первообразной: постоянная в нем устанавливается после выбора постоянных в других интегралах. Это важное замечание следует иметь в виду и впредь.

III. Если

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C'.$$

Действительно, данное соотношение равносильно следующему

$$\frac{d}{dt} F(t) = F'(t) = f(t).$$

Но тогда

$$\frac{d}{dx} F(ax+b) = F'(ax+b) \cdot a = a \cdot f(ax+b),$$

так что

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a} F(ax+b)\right] = f(ax+b).$$

т. е. $\frac{1}{a} F(ax+b)$ действительно оказывается первообразной для функции $f(ax+b)$.

Особенно часто встречаются случаи, когда $a=1$ или $b=0$:

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C_1, \quad \int f(ax)\,dx = \frac{1}{a} F(ax) + C_2.$$

(На деле правило III есть очень частный случай правила замены переменной в неопределенном интеграле, о чем будет речь ниже, в n° **160.**)

159. Примеры. 1) $\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx$.

Пользуясь правилами II и I (и формулами 3, 2), имеем:

$$\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx = \int 6x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 5\,dx =$$

$$= 6\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int dx =$$

$$= 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Легко проинтегрировать многочлен и в общем виде.

2) $$\int (1+\sqrt{x})^4\,dx = \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2)\,dx =$$

$$= \int dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 6\int x\,dx + 4\int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int x^2\,dx =$$

$$= x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C. \qquad \text{(II, I; 3, 2)}$$

3) $$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{7}{6}}\,dx - \int x^{\frac{1}{6}}\,dx = \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C. \qquad \text{(II; 3)}$$

Дадим ряд примеров на применение правила III:

4) (а) $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \qquad \text{(III; 4)}$$

(б) $$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,dx =$$
$(k > 1)$
$$= \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C. \qquad \text{(III; 3)}$$

5) (а) $$\int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C, \qquad \text{(III; 8)}$$
$(m \neq 0)$

(б) $$\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx + C. \qquad \text{(III; 9)}$$
$(m \neq 0)$

6) (а) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad \text{(III; 6)}$$
$(a > 0)$

(б) $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \qquad \text{(III; 5)}$$

Интегрирование дроби со сложным знаменателем часто облегчается разложением ее на сумму дробей с более простыми знаменателями. Например,

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right);$$

поэтому

7) $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Некоторые тригонометрические выражения, после тех или иных элементарных преобразований, интегрируются также при помощи простейших приемов.

Очевидно, например,

$$\cos^2 mx = \frac{1+\cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2},$$

откуда

8) (а) $$\int \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\sin 2mx + C,$$

$(m \neq 0)$

(б) $$\int \sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx + C.$$

160. Интегрирование путем замены переменной. Изложим один из сильнейших приемов для интегрирования функций — метод з а м е н ы п е р е м е н н о й или п о д с т а н о в к и. В основе его лежит следующее простое замечание:

если известно, что

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C,$$

то тогда

$$\int g(\omega(x))\,\omega'(x)\,dx = G(\omega(x)) + C.$$

[Все фигурирующие здесь функции $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ предполагаются непрерывными.]

Это прямо вытекает из правила дифференцирования сложной функции [n° 84]

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x)) = G'(\omega(x))\cdot\omega'(x) = g(\omega(x))\cdot\omega'(x),$$

если учесть, что $G'(t) = g(t)$. То же можно выразить и иначе, сказав, что соотношение

$$dG(t) = g(t)\,dt$$

сохраняет силу и при замене независимой переменной t на функцию $\omega(x)$ [n° 92].

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)\,dx.$$

Во многих случаях удается в качестве новой переменной выбрать такую функцию от x: $t = \omega(x)$, чтобы подинтегральное выражение представилось в виде

$$f(x)\,dx = g(\omega(x))\cdot\omega'(x)\,dx, \tag{1}$$

где $g(t)$ — более удобная для интегрирования функция, чем $f(x)$. Тогда, по сказанному выше, достаточно найти интеграл

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C,$$

чтобы из него подстановкой $t = \omega(x)$ получить искомый интеграл. Обыкновенно пишут просто

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt, \tag{2}$$

подразумевая уже, что в функции от t, которая представлена интегралом справа, произведена указанная замена.

Найдем, например, интеграл

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx.$$

Так как $d\sin x = \cos x\,dx$, то, полагая $t = \sin x$, преобразуем подинтегральное выражение к виду

$$\sin^3 x \cos x\,dx = \sin^3 x\,d\sin x = t^3\,dt.$$

Интеграл от последнего выражения вычисляется легко

$$\int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Остается лишь вернуться к переменной x, подставляя $\sin x$ вместо t:

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Обращаем внимание на то, что при выборе подстановки $t = \omega(x)$, упрощающей подинтегральное выражение, нужно помнить, что в его составе должен найтись множитель $\omega'(x)\,dx$, дающий дифференциал новой переменной dt [см. (1)]. В предыдущем примере удача подстановки $t = \sin x$ обусловливалась наличием множителя $\cos x\,dx = dt$.

В этой связи поучителен пример

$$\int \sin^3 x\,dx;$$

здесь подстановка $t = \sin x$ была бы непригодна именно ввиду отсутствия упомянутого множителя. Если попробовать выделить из подынтегрального выражения, в качестве дифференциала новой переменной, множитель $\sin x\,dx$ или лучше $-\sin x\,dx$, то это приведет к подстановке $t = \cos x$; так как остающееся выражение

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

этой подстановкой упрощается, то подстановка оправдана. Имеем

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (t^2 - 1)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Иной раз подстановка применяется в форме, отличной от указанной. Именно, в подинтегральное выражение $f(x)\,dx$ непосредственно подставляют, вместо x, функцию $x = \varphi(t)$ от новой переменной t и получают в результате выражение

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = g(t)\,dt.$$

Очевидно, если в этом выражении произвести подстановку $t = \omega(x)$, где $\omega(x)$ — функция, обратная для $\varphi(t)$, то вернемся к исходному подинтегральному выражению $f(x)\,dx$. Поэтому, как и прежде, имеет место равенство (2), где справа, после вычисления интеграла, следует положить $t = \omega(x)$.

Для примера найдем интеграл

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Разиость квадратов под корием (из которых первый постоянен) подсказывает нам тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$ *). Имеем

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t\, dt$$

и

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 t\, dt.$$

Но мы уже знаем интеграл

$$a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t\right] + C$$

[п° 159, 8)]. Для перехода к x подставляем $t = \arcsin \frac{x}{a}$; преобразование второго слагаемого облегчается тем, что

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} a \sin t \cdot a \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Окончательио

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Уменье разыскивать выгодиые подстановки создается упражнением. Хотя общих указаиий по этому поводу дать нельзя, но отдельные частные замечаиия, облегчающие это разыскивание, читатель иайдет в следующем номере. В каионических случаях подстаиовки будут просто указаны в курсе.

161. Примеры. 1) (а) $\int e^{x^2} \cdot x\, dx$, б) $\int \frac{x\, dx}{1 + x^4}$.

а) Решеиие. Полагая $t = x^2$, имеем $dt = 2x\, dx$, так что

$$\int e^{x^2} \cdot x\, dx = \frac{1}{2} \int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

б) Указание. Та же подстановка. Ответ. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$. В обоих случаях интегралы имели вид

$$\int g(x^2) \cdot x\, dx = \frac{1}{2} \int g(x^2)\, dx^2,$$

где g — удобная для интегрироваиия функция; для таких интегралов естествеииа подстаиовка $t = x^2$.

2) (а) $\int \frac{\ln x}{x} dx$, (б) $\int \frac{dx}{x \ln x}$, (в) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Указание. Все эти интегралы имеют вид

$$\int g(\ln x) \frac{dx}{x} = \int g(\ln x)\, d \ln x.$$

*) Уместно указать, что x мы считаем изменяющимся между $-a$ и a, а t — между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Поэтому $t = \arcsin \frac{x}{a}$.

и берутся подстановкой $t = \ln x$.

Ответ. (а) $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$; (б) $\ln\ln x + C$; (в) $-\frac{1}{\ln x} + C$.

3) Интегралы вида

$$\int g(\sin x)\cdot\cos x\,dx, \qquad \int g(\cos x)\cdot\sin x\,dx, \qquad \int g(\operatorname{tg} x)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$$

берутся, соответственно, подстановками

$$t = \sin x, \qquad t = \cos x, \qquad t = \operatorname{tg} x.$$

Например,

(а) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sin x + C$;

(б) $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} =$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

4) (а) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, (б) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

Решение. (а) Если положить $t = x^2+1$, то числитель $2x\,dx$ дает в точности dt; интеграл сведется к

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

Заметим, что всегда, когда предложенный интеграл имеет вид

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)},$$

так что в подинтегральном выражении числитель представляет собой дифференциал знаменателя, подстановка $t = f(x)$ сразу приводит к цели:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

По этому образцу имеем

(б) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$ [ср. 3 (б)].

5) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Подстановка: $x = a\cdot\operatorname{tg} t$*), $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$, так что

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t\cos t) + C$$ [см. n° 159, 8)].

*) Причем достаточно предположить t изменяющимся между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Перейдем теперь к перемениой x, полагая $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ и выражая $\sin t$ и $\cos t$ через $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$. Окончательио

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$ $(\alpha \gtrless 0)$.

Положим $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$ и примем t за иовую перемеиную. При возведеиии в квадрат, x^2 в обеих частях можно опустить, и в результате

$$x = \frac{t^2-\alpha}{2t},$$

так что

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - \frac{t^2-\alpha}{2t} = \frac{t^2+\alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}\,dt.$$

Окончательио

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C.$$

162. Интегрирование по частям. Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ будут две функции от x, имеющие непрерывные производные $u' = f'(x)$ и $v' = g'(x)$. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, $d(uv) = u\,dv + v\,du$ или $u\,dv = d(uv) - v\,du$. Для выражения $d(uv)$ первообразной, очевидно, будет uv; поэтому имеет место формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{3}$$

Эта формула выражает правило интегрирования по частям. Оно приводит интегрирование выражения $u\,dv = uv'\,dx$ к интегрированию выражения $v\,du = vu'\,dx$.

Пусть, иапример, требуется иайти иитеграл $\int x\cos x\,dx$. Положим

$$u = x, \quad du = \cos x\,dx, \quad \text{так что} \quad du = dx, \quad v = \sin x\text{*)}$$

и, по формуле (3),

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \tag{4}$$

Таким образом, интегрироваиие по частям позволило замеиить сложиую подиитегральиую фуикцию $x\cos x$ иа простую $\sin x$. Попутио для получения v пришлось проиитегрировать выражеиие $\cos x\,dx$ — отсюда и иазваиие: иитегрироваиие по частям.

*) Так как для наших целей достаточио представить $\cos x\,dx$ хоть одним способом в виде dv, то иет надобности писать наиболее общее выражеиие для v, содержащее произвольную постоянную. Это замечание следует иметь в виду и впредь.

Применяя формулу (3) к вычислению предложенного интеграла, приходится разбивать подинтегральное выражение на два множителя: u и $dv = v'\,dx$, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части. Нужно стараться, чтобы интегрирование дифференциала dv не представляло трудностей и чтобы замена u на du и dv на v в совокупности влекла за собой упрощение подинтегрального выражения. Так, в разобранном примере было бы явно невыгодно взять, скажем, $x\,dx$ за dv, а $\cos x$ за u.

При некотором навыке нет надобности вводить обозначения u, v и можно сразу применять формулу [ср. (4)].

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin bx\,dx, \quad \int x^k \cos bx\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx \text{ и др.},$$

которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

163. Примеры. 1) $\int x^3 \ln x\,dx$.

Дифференцирование $\ln x$ приводит к упрощению, поэтому полагаем

$$u = \ln x, \quad dv = x^3\,dx, \quad \text{так что} \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{4}x^4$$

и

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

2) (а) $\int \ln x\,dx$, (б) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Принимая в обоих случаях $dx = dv$, получим:

(а) $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$;

(б) $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int x\,d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \qquad [\text{n}^\circ\ \mathbf{161},\ 4\ (\text{а})].$$

3) $\int x^2 \sin x\,dx$.

Имеем

$$\int x^2\,d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)\,d(x^2) =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

Таким образом, мы привели искомый интеграл к уже известному [n° 162, (4)]; подставляя его значение, получим

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

В общей сложности здесь правило интегрирования по частям пришлось применить двукратно.

Так же, повторным применением этого правила, вычисляются интегралы

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx, \quad \int P(x) \sin bx\, dx, \quad \int P(x) \cos bx\, dx,$$

где $P(x)$ — целый относительно x многочлен.

4) Любопытный пример представляют интегралы

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx, \qquad \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Если к ним применить интегрирование по частям (в обоих случаях взяв, скажем, $dv = e^{ax}\, dx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$), то получим

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Таким образом, каждый из этих интегралов оказался выраженным через другой*).

Однако если в первую формулу подставить выражение второго интеграла из второй формулы, то придем к у р а в н е н и ю относительно первого интеграла, из которого он и определится:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Аналогично находим и второй интеграл

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C'.$$

5) В качестве последнего примера применения метода интегрирования по частям выведем р е к у р р е н т н у ю ф о р м у л у для вычисления интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Применим к нему формулу (3), полагая

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx, \quad \text{так что} \quad du = -\frac{2nx \cdot dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x.$$

*) Если под интегралами разуметь о п р е д е л е н н ы е первообразные [ср. замечание в n° 158], то, желая во второй формуле иметь те же функции, что и в первой, мы, строго говоря, должны были справа присоединить еще некоторую постоянную. Конечно, она была бы поглощена постоянными C и C' в окончательных выражениях.

Мы получим

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx.$$

Последний интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, придем к соотношению

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

откуда

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n. \tag{5}$$

Полученная формула сводит вычисление интеграла J_{n+1} к вычислению интеграла J_n с меньшим на единицу значком. Зная интеграл

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

[n°159, 6) (б); мы берем одно из его значений], по этой формуле, при $n = 1$, найдем

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

[что мы выше получили другим путем, см. n° 161, 5)]. Полагая в формуле (5) $n = 2$, получим далее

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

и т. д. Таким образом можно вычислить интеграл J_n для любого натурального показателя.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

164. Постановка задачи интегрирования в конечном виде. Мы познакомились с элементарными приемами вычисления неопределенных интегралов. Эти приемы не предопределяют точно пути, по которому надлежит идти, чтобы вычислить данный интеграл, предоставляя многое искусству вычислителя. В этом и следующих параграфах мы остановимся подробнее на некоторых важных частных классах функций и по отношению к их интегралам установим вполне определенный порядок вычислений.

Теперь выясним, что именно нас будет интересовать при интегрировании функций упомянутых классов и по какому принципу будет произведено самое их выделение.

В n°**25** было охарактеризовано то многообразие функций, к которым в первую очередь применяется анализ; это — так называемые элементарные функции и функции, которые выражаются через элементарные с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций (без предельного перехода).

В главе V мы видели, что все такие функции дифференцируемы и их производные принадлежат к тому же многообразию. Иначе обстоит дело с их интегралами: очень часто оказывается, что интеграл от функции, принадлежащей упомянутому классу, сам этому классу не принадлежит, т. е. не выражается через элементарные функции с помощью конечного числа названных выше операций. К числу таких заведомо невыражающихся в конечном виде интегралов относятся, например,

$$\int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \sin x^2\,dx, \qquad \int \cos x^2\,dx,$$
$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x};$$

другие примеры подобного рода будут приведены ниже [n°n°**169**, **172** и сл.]. *Важно подчеркнуть, что все эти интегралы реально существуют*), но они лишь представляют собой совершенно новые функции и не приводятся к тем функциям, которые мы назвали элементарными.*

Известны сравнительно немногие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде; этими классами мы ближайшим образом и займемся. На первом месте среди них надлежит поставить важный класс рациональных функций.

165. Простые дроби и их интегрирование. Так как из неправильной рациональной дроби можно исключить целую часть, интегрирование которой не представляет трудностей, то достаточно заняться интегрированием правильных дробей (у которых степень числителя ниже степени знаменателя).

Из них мы остановимся здесь на так называемых простых дробях; это будут дроби следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \qquad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$
$$(k=2,\ 3,\ \ldots) \qquad\qquad (m=2,\ 3,\ \ldots)$$

где A, M, N, a, p, q — вещественные числа; кроме того, по отношению к дробям вида III и IV предполагается, что трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней, так что

$$q-\frac{p^2}{4}>0.$$

---

*) См. сказанное по этому поводу в n°**156**. Мы вернемся к этому ниже в n°**183**.

Дроби вида I и II мы уже умеем интегрировать [п° 159, 4)]:

$$A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=-\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

Что же касается дробей вида III и IV, то их интегрирование облегчается следующей подстановкой. Выделим из выражения x^2+px+q полный квадрат двучлена

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]=$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Последнее выражение в скобках, по предположению, есть число положительное, его можно положить равным a^2, если взять

$$a=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Теперь прибегнем к подстановке

$$x+\frac{p}{2}=t,\qquad dx=dt,$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\qquad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

В случае III будем иметь:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt=$$
$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C,$$

или, возвращаясь к x и подставляя вместо a его значение:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Для случая IV та же подстановка даст:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}\,dt=$$
$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.\qquad(1)$$

Первый из интегралов справа легко вычисляется подстановкой $t^2+a^2=u$, $2t\,dt=du$:

$$\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m}=\int\frac{du}{u^m}=-\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{u^{m-1}}+C=$$
$$=-\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C. \qquad (2)$$

Второй же из интегралов справа, при любом m, может быть вычислен по рекуррентной формуле n° **163**, (5). Затем останется лишь положить в результате $t=\frac{2x+p}{2}$, чтобы вернуться к переменной x.

Этим исчерпывается вопрос об интегрировании простых дробей.

166. Интегрирование правильных дробей. Итак, простые дроби мы интегрировать умеем. Что же касается произвольной правильной дроби, то ее интегрирование основывается на следующей важной теореме, которая доказывается в курсе алгебры:

Каждая правильная дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.

Это разложение правильной дроби на простые дроби теснейшим образом связано с разложением ее знаменателя на простые множители. Как известно, каждый целый многочлен с вещественными коэффициентами разлагается (и притом единственным образом) на вещественные же множители типа $x-a$ и x^2+px+q; при этом квадратичные множители предполагаются не имеющими вещественных корней и, следовательно, неразложимыми на вещественные линейные множители. Объединяя одинаковые множители (если таковые имеются) и полагая, для простоты, старший коэффициент многочлена $Q(x)$ равным единице, можно записать разложение этого многочлена схематически в виде

$$Q(x)=\ldots\,(x-a)^k\,\ldots\,(x^2+px+q)^m\ldots, \qquad (3)$$

где $\ldots k, \ldots, m, \ldots$ суть натуральные числа.

Заметим, что если степень полинома Q есть n, то очевидно, сумма всех показателей k, сложенная с удвоенной суммой всех показателей m, в точности даст n:

$$\sum k+2\sum m=n. \qquad (4)$$

В алгебре устанавливается, что каждому множителю вида $(x-a)^k$ в разложении знаменателя правильной дроби отвечает группа из k простых дробей:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \qquad (5)$$

а каждому множителю вида $(x^2+px+q)^m$ — группа из m простых дробей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \tag{6}$$

причем A, M, N здесь — числовые коэффициенты. Таким образом, зная разложение (3), мы тем самым знаем знаменатели тех простых дробей, на которые разлагается данная дробь $\frac{P}{Q}$. Остановимся на вопросе об определении числителей, т. е. коэффициентов A, M, N. Так как числители группы дробей (5) содержат k коэффициентов, а числители группы дробей (6) $2m$ коэффициентов, то ввиду (4) всего их будет n.

Для определения упомянутых коэффициентов обычно прибегают к методу неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем. Зная форму разложения дроби $\frac{P}{Q}$, пишут его с буквенными коэффициентами в числителях справа. Общим знаменателем всех простых дробей, очевидно, будет Q; складывая их, получим правильную дробь *). Если отбросить теперь слева и справа знаменатель Q, то придем к равенству двух многочленов $(n-1)$-й степени, тождественному относительно x. Коэффициентами при различных степенях x многочлена справа будут линейные однородные многочлены относительно n коэффициентов, обозначенных буквами; приравнивая их соответствующим численным коэффициентам полинома P, получим, наконец, систему n линейных уравнений, из которых буквенные коэффициенты и определятся. Ввиду того, что возможность разложения на простые дроби наперед установлена, упомянутая система никогда не может оказаться противоречивой.

Больше того, так как упомянутая система уравнений имеет решение, каков бы ни был набор свободных членов (коэффициентов полинома P), то ее определитель необходимо будет отличен от нуля. Иными словами, система всегда оказывается определенной. Это простое замечание попутно доказывает и единственность разложения правильной дроби на простые дроби.

Поясним сказанное примером.

Пусть дана дробь $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. Согласно общей теореме, для нее имеется разложение

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определим, исходя из тождества

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2).$$

*) Сумма правильных рациональных дробей всегда представляет собой правильную же дробь.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, придем к системе из пяти уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+B=0, \\ x^3 & -2B+C=0, \\ x^2 & 2A+B-2C+D=2, \\ x^1 & -2B+C-2D+E=2, \\ x^0 & A-2C-2E=13, \end{array}$$

откуда

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-2, \quad D=-3, \quad E=-4.$$

Окончательно

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Алгебраический факт, который мы только что установили, имеет непосредственное применение к интегрированию рациональных дробей. Как мы видели в предыдущем номере, простые дроби интегрируются в конечном виде. Теперь мы то же можем сказать о любой рациональной дроби. Если всмотреться в те функции, через которые выражаются интегралы от целого многочлена и от правильных дробей, то можно сформулировать более точный результат:

Интеграл от любой рациональной функции выражается в конечном виде с помощью рациональной же функции, логарифма и арктангенса.

Например, возвращаясь к только что рассмотренному примеру и вспоминая выведенные выше формулы [165], имеем:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}\,dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arctg} x+C.$$

Замечание. Разложение на простые дроби ведет свое происхождение от Лейбница. Он легко справляется с линейными множителями в знаменателе, даже отвечающими кратным корням. В случае мнимых корней Лейбниц сопоставляет каждый такой корень с сопряженным ему и из двух мнимых линейных выражений получает вещественное квадратичное выражение. Однако это не всегда ему удается: так разложение

$$x^4+a^4=(x^2+\sqrt{2}\,ax+a^2)(x^2-\sqrt{2}\,ax+a^2)$$

Лейбниц получить не смог (его впоследствии указал Тейлор).

Определение числителей простых дробей по методу неопределенных коэффициентов принадлежит Иоганну Бернулли.

167. Метод Остроградского для выделения рациональной части интеграла. Остроградский*) указал прием, с помощью которого нахождение интеграла от правильной рациональной дроби значительно упрощается. Этот прием позволяет чисто алгебраическим путем выделить рациональную часть интеграла.

---

*) Академик Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик и механик.

Мы видели [n° 165], что рациональные члены в составе интеграла получаются при интегрировании простых дробей вида II и IV. В первом случае интеграл можно написать сразу:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \tag{7}$$

Установим теперь, какой вид имеет рациональная часть интеграла

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx \qquad \left(m>1,\quad q-\frac{p^2}{4}>0\right).$$

Прибегнув к знакомой уже нам подстановке $x+\frac{p}{2}=t$, используем равенства (1), (2) и формулу приведения (5) n° 163 при $n=m-1$. Если вернуться к переменной x, то получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

где M', N' и α означают некоторые постоянные коэффициенты. По этой же формуле, замсняя m на $m-1$, для последнего интеграла найдем (если $m>2$)

$$\int \frac{\alpha\,dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}}$$

и т. д., пока не сведем показатель трехчлсна x^2+px+q в интеграле справа к единице. Все последовательно выделяемые рациональные члены суть правильные дроби. Объединяя их вместе, получим результат вида

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda \int \frac{dx}{x^2+px+q}, \tag{8}$$

где $R(x)$ — целый полином, степени низшей, чем знаменатель *), а λ — постоянная.

Пусть имеем правильную дробь $\frac{P}{Q}$, которую будем предполагать несократимой, и пусть знаменатель ее Q разложен на простые множители [см. (3)]. Тогда интеграл от этой дроби представится в виде суммы интегралов от дробей вида (5) или (6). Если k (или m) больше единицы, то интегралы всех дробей группы (5) [или (6)], кроме первой, преобразуются по формуле (7) [или (8)]. Объединяя все эти результаты, окончательно придем к формуле вида

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \tag{9}$$

Рациональная часть интеграла $\frac{P_1}{Q_1}$ получена от сложения выделенных выше рациональных частей; следовательно, прежде всего она является *правильной дробью* *), а ее знаменатель имеет разложение

$$Q_1(x) = \ldots\ (x-a)^{k-1}\ \ldots\ (x^2+px+q)^{m-1}\ \ldots$$

---

*) См. сноску на стр. 300.

Что же касается дроби $\frac{P_2}{Q_2}$, оставшейся под знаком интеграла, то она получилась от сложения дробей вида I и III, так что она также правильная и

$$Q_2(x) = \ldots (x-a) \ldots (x^2+px+q) \ldots$$

Очевидно [см. (3)], $Q = Q_1 Q_2$.

Формула (9) и называется *формулой Остроградского*.

Дифференцируя, можно представить ее в равносильной форме

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1}\right]' + \frac{P_2}{Q_2}. \tag{10}$$

Мы видели, что многочлены Q_1 и Q_2 легко находятся, если известно разложение (3) многочлена Q. Но они могут быть определены и без этого разложения. Действительно, так как производная Q' содержит все простые множители, на которые разлагается Q, именно, с показателями на единицу меньшими, то Q_1 является наибольшим общим делителем Q и Q', так что может быть определено по этим многочленам, например, по способу последовательного деления. Если Q_1 известно, то Q_2 определится простым делением Q на Q_1.

Обратимся к определению числителей P_1 и P_2 в формуле (10). Для этого также пользуются методом неопределенных коэффициентов.

Обозначим через n, n_1, n_2, соответственно, степени многочленов Q, Q_1, Q_2, так что $n_1 + n_2 = n$; тогда степени многочленов P, P_1, P_2 будут не выше $n-1$, n_1-1, n_2-1. Подставим в качестве P_1 и P_2 многочлены степеней n_1-1 и n_2-1 с буквенными коэффициентами; всего этих коэффициентов будет n_1+n_2, т. е. n. Выполним в (10) дифференцирование

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P}{Q}.$$

Покажем теперь, что первую дробь всегда можно привести к знаменателю Q, сохраняя целым числитель. Именно

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H}{Q},$$

если H означает частное $\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}$. Но это частное можно представить в виде целого многочлена. Действительно, если $(x-a)^k$, при $k \geqslant 1$, входит в состав Q_1, то $(x-a)^{k-1}$ войдет в Q_1', а $x-a$ в состав Q_2; такое же заключение можно сделать и о множителе вида $(x^2+px+q)^m$ при $m \geqslant 1$. Следовательно, числитель H нацело делится на знаменатель. и впредь под H можно разуметь целый многочлен (степени n_2-1).

Освобождаясь от общего знаменателя Q, придем к тождеству двух многочленов (степени $n-1$)

$$P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1 = P.$$

Отсюда, как и выше, для определения n введенных буквенных коэффициентов получим систему из n линейных уравнений.

Так как возможность разложения (10) установлена, каково бы ни было P, то упомянутая система должна быть совместной при любых свободных

членах. Отсюда само собой вытекает, что определитель ее отличен от нуля, а значит — система необходимо оказывается определенной, и разложение (10) — при указанных знаменателях Q_1 и Q_2 — возможно лишь единственным образом *).

Пример. Пусть требуется выделить рациональную часть интеграла

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$$

Имеем

$$Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1},$$

откуда

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8 = (2ax+b)(x^3+x^2+x+1) -$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях получим систему уравнений, из которых и определятся неизвестные $a, b, \dots, f$:

x^5	$d=0$ (в последующем уже d в расчет не берем)	
x^4	$-a+e=4$	
x^3	$-2b+e+f=4$	$a=-1,\ b=1,$
x^2	$a-b-3c+e+f=16$	$c=-4,\ d=0,$
x^1	$2a-2c+e+f=12$	$e=3,\quad f=3.$
x^0	$b-c+f=8$	

Итак, искомый интеграл

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} +$$
$$+3\int\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3\operatorname{arctg} x + C.$$

В этом примере вычисление последнего интеграла легко было произвести сразу. В других случаях приходится снова разлагать на простые дроби. Можно, впрочем, и этот процесс объединить с предыдущим.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

168. Интегрирование выражений вида $R\left(x\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$**).** Выше мы научились интегрировать в конечном виде рациональные дифференциалы. В дальнейшем основным приемом интегрирования тех или других классов дифференциальных выражений будет разыскивание таких подстановок $t=\omega(x)$ (где ω сама выражается через

*) Ср. аналогичное замечание по поводу разложения правильной дроби на простые дроби, стр. 300.

**) Условимся раз навсегда буквой R обозначать рациональную функцию от своих аргументов.

элементарные функции), которые привели бы подинтегральное выражение к рациональному виду. Назовем этот прием **методом рационализации подинтегрального выражения**.

В качестве первого примера его применения рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx, \tag{1}$$

где R означает рациональную функцию от двух аргументов, m — натуральное число, а α, β, γ, δ — постоянные.

Положим

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \quad t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

Интеграл перейдет в

$$\int R(\varphi(t), t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

здесь дифференциал имеет уже рациональный вид, так как R, φ, φ' — рациональные функции. Вычислив этот интеграл по правилам предыдущего параграфа, к старой переменной вернемся, подставив $t=\omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся и более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \ldots\right) dx,$$

где все показатели r, s, ... рациональны; стоит лишь привести эти показатели к общему знаменателю m, чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x и от радикала $\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Пример. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}.$

Полагаем

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \quad x=\frac{t^3+1}{t^3-1}, \quad dx=-\frac{6t^2\,dt}{(t^3-1)^2};$$

тогда

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}=\int\frac{-3\,dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

169. Интегрирование биномиальных дифференциалов. Биномиальными называются дифференциалы вида

$$x^m (a+bx^n)^p \, dx,$$

где a, b — любые постоянные, а показатели m, n, p — рациональные числа. Выясним случаи, когда эти выражения интегрируются в конечном виде.

Один такой случай ясен непосредственно: если p — число целое (положительное, нуль или отрицательное), то рассматриваемое выражение относится к типу, изученному в предыдущем номере. Именно, если через λ обозначить наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n, то мы имеем здесь выражение вида $R(\sqrt[\lambda]{x})\,dx$, так что для рационализации его достаточна подстановка $t=\sqrt[\lambda]{x}$.

Преобразуем теперь данное выражение подстановкой $z=x^n$. Тогда

$$x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} \, dz$$

и, положив для краткости

$$\frac{m+1}{n}-1=q,$$

будем иметь

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q \, dz. \tag{2}$$

Если q — число целое, то мы снова приходим к выражению изученного типа. Действительно, если обозначить через ν знаменатель дроби p, то преобразованное выражение имеет вид $R(z, \sqrt[\nu]{a+bz})$. Рационализации подинтегрального выражения можно достигнуть и сразу — подстановкой

$$t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n}.$$

Наконец, перепишем второй из интегралов (2) так:

$$\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q} \, dz.$$

Легко усмотреть, что при $p+q$ целом мы также имеем изученный случай: преобразованное выражение имеет вид $R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right)$. Подинтегральное выражение в данном интеграле рационализируется и сразу — подстановкой

$$t=\sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}.$$

Таким образом, *оба интеграла* (2) *выражаются в конечном виде, если оказывается целым одно из чисел*

$$p,\ q,\ p+q$$

или (что то же) *одно из чисел*

$$p,\ \frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n}+p.$$

Эти случаи интегрируемости, по существу, известны были еще Ньютону. Однако лишь в середине прошлого столетия Чебышев установил замечательный факт, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет.

Рассмотрим примеры.

1) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Здесь $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$; так как $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$, то имеем второй случай интегрируемости. Заметив, что $\nu=3$, положим (по общему правилу)

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\quad x=(t^3-1)^4,\quad dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt,$$

тогда

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int (t^6-t^3)\,dt = \frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C \text{ и т. д.}$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx.$$

На этот раз $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$ — третий случай интегрируемости, так как $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$. Здесь $\nu=4$; положим

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\qquad x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},$$

$$dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt,$$

так что $\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C$$

и т. д.

170. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Подстановки Эйлера. Переходим к рассмотрению очень важного класса интегралов

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \tag{3}$$

Предполагаем, конечно, что квадратный трехчлен не имеет равных корней, так что корень из него не может быть заменен рациональным выражением. Мы изучим три подстановки, называемые подстановками Эйлера, с помощью которых всегда можно достигнуть здесь рационализации подинтегрального выражения.

Первая подстановка приложима в случае, если $a > 0$. Тогда полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\, x\,^{*)}.$$

Возводя это равенство в квадрат, найдем (по уничтожении членов ax^2 в обеих частях) $bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx$, так что

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$dx = 2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

Все остроумие эйлеровой подстановки именно в том, что для определения x получается уравнение первой степени, так что x, а одновременно с ним также и радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$, выражается рационально через t.

Если полученные выражения подставить в (3), то вопрос сведется к интегрированию рациональной функции от t. В результате, возвращаясь к x, нужно будет положить

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x.$$

Вторая подстановка приложима, если $c > 0$. В этом случае можно положить

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}\,^{**)}.$$

---

*) Можно было бы положить и $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}\,x$.

**) Или $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$.

Если возвести в квадрат, уничтожить c в обеих частях и сократить на x, то получим $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\,t$ — снова уравнение первой степени относительно x. Отсюда

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$dx=2\,\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}\cdot dt.$$

Подставив это в (3), очевидно, осуществим рационализацию подинтегрального выражения. Проинтегрировав, в результате положим

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}.$$

Замечание I. Случаи, рассмотренные выше ($a>0$ и $c>0$), приводятся один к другому подстановкой $x=\frac{1}{z}$. Поэтому всегда можно избежать пользования второй подстановкой.

Наконец, третья подстановка пригодна в том случае, если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет (различные) вещественные корни λ и μ. Тогда этот трехчлен, как известно, разлагается на линейные множители

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda).$$

Возводя в квадрат и сокращая на $x-\lambda$, получим и здесь уравнение первой степени $a(x-\mu)=t^2(x-\lambda)$, так что

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt$$

и т. д.

Замечание II. При сделанных предположениях радикал $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}$ (считая для определенности, скажем, $x>\lambda$) можно преобразовать к виду

$$(x-\lambda)\sqrt{a\,\frac{x-\mu}{x-\lambda}},$$

так что в рассматриваемом случае

$$R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R_1\left(x,\ \sqrt{a\,\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right),$$

и мы, в сущности, имеем дело с дифференциалом изученного в n° 168 типа. Третья подстановка Эйлера, которую можно записать в форме

$$t = \sqrt{a\,\frac{x-\mu}{x-\lambda}},$$

тождественна с подстановкой, уже указанной в n° 168.

Покажем теперь, что первой и третьей подстановок Эйлера одних достаточно для того, чтобы осуществить рационализацию подинтегрального выражения в (3) во всех возможных случаях. Действительно, если трехчлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни, то, как мы видели, приложима третья подстановка. Если же вещественных корней нет, т. е. $b^2-4ac<0$, то трехчлен

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]$$

при всех значениях переменной x имеет знак a. Случай $a<0$ нас не интересует, ибо тогда радикал вовсе не имел бы вещественных значений. В случае же $a>0$ применима первая подстановка.

Эти соображения приводят вместе с тем к общему утверждению: *интегралы типа* (3) *всегда берутся в конечном виде, причем для представления их, кроме функций, через которые выражаются интегралы от рациональных дифференциалов, нужны еще лишь квадратные корни.*

Примеры. 1) В n° 161, 6) мы фактически применили первую подстановку к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \qquad (\alpha = \pm a^2).$$

Хотя второй основной интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

нам известен из элементарных соображений, но — для упражнения — мы все же к нему применим эйлеровы подстановки.

(а) Если воспользоваться сначала третьей подстановкой

$$\sqrt{a^2-x^2}=t\,(a-x),$$

то

$$x=a\,\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx=\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\int \frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg} t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

Так как имеет место тождество

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\arcsin\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2} \quad (-a<x<a),$$

то этот результат лишь формой разнится от уже известного нам.

Читателю и впредь следует считаться с возможностью для интеграла получаться в разных формах, в зависимости от примененного для его вычисления метода.

(б) Если к тому же интегралу применить вторую подстановку

$$\sqrt{a^2-x^2} = xt - a,$$

то аналогично получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

Здесь мы сталкиваемся с другим любопытным обстоятельством: этот результат годится отдельно для промежутка $(-a, 0)$ и для промежутка $(0, a)$, ибо в точке $x=0$ выражение

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

лишено смысла. Пределы этого выражения при $x\to -0$ и при $x\to +0$ различны: они равны, соответственно, π и $-\pi$; выбирая для упомянутых промежутков различные же значения постоянной C так, чтобы второе из них было на 2π больше первого, можно составить функцию, непрерывную во всем промежутке $(-a, a)$, если принять за ее значение при $x=0$ общий предел слева и справа.

И на этот раз мы получили прежний результат лишь в другой форме, ибо имеют место тождества

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} - \pi & \text{для } 0<x<a, \\ \arcsin\dfrac{x}{a} + \pi & \text{для } -a<x<0. \end{cases}$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

(а) Сначала применим первую подстановку: $\sqrt{x^2-x+1} = t - x$,

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \quad dx = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt,$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt =$$
$$= \int \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right] dt =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| + C.$$

Если подставить сюда $t = x+\sqrt{x^2-x+1}$, то окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1} -$$
$$-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1| + 2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}| + C.$$

(б) Применим теперь вторую подстановку: $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$,

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1}, \quad dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt, \quad \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1},$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt=$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt=$$

$$=\frac{3}{t+1}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C'.$$

Остается подставить сюда $t=\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$; после очевидных упрощений получим:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+$$

$$+2\ln|\sqrt{x^2-x+1}+1|-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x+1|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}+x+1|+C'.$$

Это выражение, хотя и разнится от ранее полученного по форме, но при $C'=C+\frac{3}{2}$ отождествляется с ним.

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ ФУНКЦИИ

171. Интегрирование дифференциалов $R(\sin x, \cos x)\,dx$. Дифференциалы этого вида могут быть рационализированы подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$. Действительно,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg}t, \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

так что

$$R(\sin x, \cos x)\,dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, *интегралы типа*

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \qquad (1)$$

всегда берутся в конечном виде; для их выражения, кроме функций, встречающихся при интегрировании рациональных дифференциалов, нужны лишь еще тригонометрические функции.

Упомянутая подстановка, являющаяся универсальной для интегралов типа (1), приводит иной раз к сложным выкладкам. Ниже указаны случаи, когда цель может быть достигнута с помощью более простых подстановок. Предварительно сделаем следующие элементарные замечания из области алгебры.

Если целая или дробная рациональная функция $R(u, v)$ не меняет своего значения при изменении знака одного из аргументов, например u, т. е. если

$$R(-u, v) = R(u, v),$$

то она может быть приведена к виду

$$R(u, v) = R_1(u^2, v),$$

содержащему лишь четные степени u.

Если же, наоборот, при изменении знака u функция $R(u, v)$ также меняет знак, т. е. если

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

то она приводится к виду

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)\cdot u;$$

это сразу вытекает из предыдущего замечания, если его применить к функции $\frac{R(u, v)}{u}$.

I. Пусть теперь $R(u, v)$ меняет знак при изменении знака u; тогда

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx =$$
$$= -R_0(1-\cos^2 x, \cos x)\,d\cos x,$$

и рационализация достигается подстановкой $t = \cos x$.

II. Аналогично, если $R(u, v)$ меняет знак при изменении знака v, то

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_0^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx =$$
$$= R_0^*(\sin x, 1-\sin^2 x)\,d\sin x,$$

так что здесь целесообразна подстановка $t = \sin x$.

III. Предположим, наконец, что функция $R(u, v)$ не меняет своего значения при одновременном изменении знаков u и v:

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

В этом случае, заменяя u на $\frac{u}{v}v$, будем иметь

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

По свойству функции R, если изменить знаки u и v (отношение $\frac{u}{v}$ при этом не изменится),

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

а тогда, как мы знаем,

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

Поэтому

$$R(\sin x, \cos x) = R_1^*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_1^*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right),$$

т. е. попросту

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\operatorname{tg} x).$$

Здесь достигает цели подстановка $t = \operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, ибо

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = \tilde{R}(t) \frac{dt}{1+t^2}, \text{ и т. д.}$$

Замечание. Нужно сказать, что, каково бы ни было рациональное выражение $R(u, v)$, его всегда можно представить в виде суммы трех выражений рассмотренных выше частных типов. Например, можно положить

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}.$$

Первое из этих выражений меняет знак при изменении знака u, второе меняет знак при изменении знака v, а третье сохраняет значение при одновременном изменении знака u и v. Разбив выражение $R(\sin x, \cos x)$ на соответствующие слагаемые, можно к первому из них применить подстановку $t = \cos x$, ко второму — подстановку $t = \sin x$ и, наконец, к третьему — подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Таким образом, для вычисления интегралов типа (1) достаточно этих трех подстановок.

Примеры. 1) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$. Подинтегральное выражение меняет знак от замены $\cos x$ на $-\cos x$. Подстановка $t = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int t^2(1-t^2)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. Подинтегральное выражение не изменяет своего значения при замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$
$$= \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

3) $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin x (2\cos^2 x - 1)}$. Подстановка $t = \cos x$.

$$\int \frac{dx}{\sin x (2\cos^2 x - 1)} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

4) $\frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} dx$ $(0<r<1, \ -\pi < x < \pi)$. Применим здесь универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Имеем

$$\frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} dx = (1-r^2) \int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} =$$
$$= \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} t \right) + C = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

К этому интегралу приводится и такой:

$$\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2} dx = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \right] dx =$$
$$= \frac{1}{2} x + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

172. Обзор других случаев. В **n° 163** мы уже упоминали о том, как интегрируются выражения вида

$$P(x) e^{ax}\, dx, \quad P(x) \sin bx\, dx, \quad P(x) \cos bx\, dx,$$

где P — целый многочлен. Любопытно отметить, что дробные выражения (n — натуральное число)

$$\frac{e^x}{x^n} dx, \quad \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \frac{\cos x}{x^n} dx$$

уже не интегрируются в конечном виде.

С помощью интегрирования по частям легко установить для интегралов от этих выражений рекуррентные формулы и свести их, соответственно, к трем основным:

I. $\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \mathrm{li}\, y$ *) («интегральный логарифм»);

II. $\int \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{si}\, x$ («интегральный синус»);

III. $\int \frac{\cos x}{x} dx = \mathrm{ci}\, x$ («интегральный косинус») **).

Мы знаем уже [n° **163**, 4)] интегралы

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Отправляясь от них, можно в конечном виде найти интегралы

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx, \quad \int x^n e^{ax} \cos bx\, dx,$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Именно, интегрируя по частям, получим:

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} -$$

$$- \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx + \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx,$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} -$$

$$- \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Эти рекуррентные формулы позволяют свести интересующие нас интегралы к случаю $n = 0$.

§ 5. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

173. Определения. К рассмотренным в n° **170** интегралам вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx,$$

*) Подстановка $x = \ln y$.

**) Впрочем, во всех трех случаях надлежит еще фиксировать произвольную постоянную; это будет сделано впоследствии.

которые всегда вычисляются в конечном виде, естественно примыкают интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx, \tag{1}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx, \tag{2}$$

содержащие квадратный корень из многочленов третьей или четвертой степени. Это — очень важный класс интегралов, нередко встречающийся в приложениях. Однако нужно сказать, *интегралы вида* (1) *и* (2) — *как правило — уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции.* Поэтому знакомство с ними мы отнесли к заключительному параграфу, чтобы не прерывать основной линии изложения настоящей главы, посвященной, главным образом, изучению классов интегралов, берущихся в конечном виде.

Многочлены под корнем предполагаются имеющими вещественные коэффициенты. Кроме того, мы всегда будем считать, что у них нет кратных корней, ибо иначе можно было бы вынести линейный множитель из-под знака корня; вопрос свелся бы к интегрированию выражений уже ранее изученных типов, и интеграл выразился бы в конечном виде. Последнее обстоятельство может иметь место иной раз и при отсутствии кратных корней; например, легко проверить, что

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}} = x\sqrt{2x^3+1} + C.$$

Интегралы от выражений типа (1) и (2) вообще называют *эллиптическими* в связи с тем обстоятельством, что впервые с ними столкнулись при решении задачи о спрямлении эллипса [п° 201, 4)]. Впрочем, это название, в точном смысле, относят обычно лишь к тем из них, которые не берутся в конечном виде; другие же, вроде только что приведенных, называют *псевдоэллиптическими.*

Изучение и табулирование (т. е. составление таблиц значений) интегралов от выражений (1) и (2) при произвольных коэффициентах $a, b, c, \ldots$, разумеется, затруднительно. Поэтому естественно желание свести все эти интегралы к немногим таким, в состав которых входило бы по возможности меньше произвольных коэффициентов (параметров).

174. Приведение к канонической форме. Заметим, прежде всего, что вообще достаточно ограничиться случаем многочлена четвертой степени под корнем, ибо к нему легко приводится и случай, когда под корнем многочлен третьей степени. Действительно, многочлен третьей степени ax^3+bx^2+cx+d с вещественными коэффициентами необходимо имеет вещественный корень [п° 69], скажем, λ, и, следовательно, допускает вещественное разложение

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\lambda)(x^2+px+q).$$

Подстановка $x-\lambda=t^2$ или $(x-\lambda=-t^2)$ и осуществляет требуемое приведение

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+\ldots})\,dx = \int R(t^2+\lambda, t\sqrt{at^4+\ldots})\,dt.$$

Впредь мы станем рассматривать лишь интегралы, содержащие корень из многочлена четвертой степени вида (2).

С помощью элементарных преобразований и подстановок, на которых мы не имеем возможности здесь останавливаться, прежде всего каждый

эллиптический интеграл (2) — помимо интегралов, выражающихся в конечном виде, — приводится к так называемому *каноническому* интегралу вида

$$\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{3}$$

где k есть некоторая положительная правильная дробь: $0<k<1$.

Выделяя из рациональной функции R целую часть, а оставшуюся правильную дробь разлагая на простые, приходят в результате к такому общему заключению: *все эллиптические интегралы с помощью элементарных подстановок — и с точностью до слагаемых, выражающихся в конечном виде, — приводятся к следующим трем стандартным интегралам:*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

и

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad (0<k<1)$$

где в последнем интеграле h может оказаться и комплексным. Эти интегралы, как показал Лиувилль, в конечном виде уже не берутся. Их Лежандр *) назвал *эллиптическими интегралами*, соответственно, *1-го, 2-го* и *3-го рода*. Первые два содержат лишь один параметр k, а последний, кроме него, еще (комплексный) параметр h.

Лежандр внес в эти интегралы еще дальнейшие упрощения, выполнив в них подстановку $z=\sin\varphi$ $\left(\varphi \text{ изменяется от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. При этом первый из них непосредственно переходит в интеграл

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \tag{4}$$

второй преобразуется так:

$$\int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

т. е. приводится к предыдущему интегралу и к новому интегралу

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{5}$$

Наконец, третий интеграл при указанной подстановке переходит в

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{6}$$

Интегралы (4), (5) и (6) также называются *эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го рода — в форме Лежандра.*

Из них особую важность и частое применение имеют первые два. Если считать, что эти интегралы при $\varphi=0$ обращаются в нуль, и тем фиксировать содержащиеся в них произвольные постоянные, то получатся две вполне определенные функции от φ, которые Лежандр обозначил, соответственно,

*) Адриан Мари Лежандр (1752—1833) и Жозеф Лиувилль (1809—1882) — выдающиеся французские математики.

через $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$. Здесь, кроме независимой переменной φ, указан также параметр k, называемый *модулем*, который входит в выражения этих функций.

Лежандром были составлены обширные таблицы значений этих функций при различных φ и различных k. В них не только аргумент φ, трактуемый как *угол*, выражается в градусах, но и модуль k (правильная дробь!) рассматривается, как синус некоторого угла θ, который и указывается в таблице вместо модуля, и притом также в градусах.

Кроме того, как Лежандром, так и другими учеными были изучены глубокие свойства этих функций, установлен ряд относящихся к ним формул и т. д. Благодаря этому, функции F и E Лежандра вошли в семью функций, встречающихся в анализе и его приложениях, на равных правах с элементарными функциями.

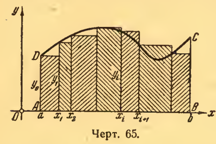
Низшая часть интегрального исчисления, которой в основном мы вынуждены пока ограничиться, занимается «интегрированием в конечном виде». Однако было бы ошибочно думать, что этим ограничиваются задачи интегрального исчисления вообще: эллиптические интегралы F и E являются примерами таких функций, которые плодотворно изучаются по их интегральным выражениям и с успехом применяются, хотя и не могут быть представлены через элементарные функции в конечном виде.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

175. Другой подход к задаче о площади. Вернемся к задаче об определении площади P криволинейной трапеции $ABCD$ (черт. 65), которой мы уже занимались в n° **156**. Мы изложим сейчас другой подход к решению этой задачи *).



Черт. 65.

Разделим основание AB нашей фигуры произвольным образом на части и проведем ординаты, соответствующие точкам деления; тогда криволинейная трапеция разобьется на ряд полосок (см. чертеж).

Заменим теперь приближенно каждую полоску некоторым прямоугольником, основание которого то же, что и у полоски, а высота совпадает с одной из ординат полоски, скажем, с крайней слева. Таким образом, криволинейная фигура заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников.

Обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b. \qquad (1)$$

Основание i-го прямоугольника ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), очевидно, равно разности $x_{i+1} - x_i$, которую мы будем обозначать через Δx_i. Что же касается высоты, то, по сказанному, она равна $y_i = f(x_i)$. Поэтому площадь i-го прямоугольника будет $y_i \Delta x_i = f(x_i)\Delta x_i$.

Просуммировав площади всех прямоугольников, получим приближенное значение площади P криволинейной трапеции:

$$P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \quad \text{или} \quad P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

*) Обобщая при этом идею, уже однажды примененную в частном примере [n° 43, 3)].

Погрешность этого равенства при безграничном убывании всех Δx_i стремится к нулю. Точное значение площади P получится как предел:

$$P = \lim \sum y_i \Delta x_i = \lim \sum f(x_i) \Delta x_i \qquad (2)$$

в предположении, что все длины Δx_i одновременно стремятся к нулю.

Тот же прием пригоден и для вычисления площади $P(x)$ фигуры $AKLD$ (черт. 63), лишь дробить на части пришлось бы отрезок AK. Заметим еще, что случай, когда $y = f(x)$ принимает и отрицательные значения, исчерпывается заключенным в n° **156** условием считать площади частей фигуры под осью x — отрицательными.

Для обозначения суммы вида $\sum y\Delta x$ (вернее сказать — предельного значения этой суммы) Лейбниц и ввел символ $\int y\,dx$, где $y\,dx$ напоминает типичное слагаемое суммы, а $\int$ есть стилизованная буква S — начальная буква латинского слова Summa *). Так как площадь, представляющая это предельное значение, в то же время является первообразной для функции $f(x)$, то тот же символ сохранился и для обозначения первообразной функции. Впоследствии, с введением функционального обозначения, стали писать

$$\int f(x)\,dx,$$

если речь идет о переменной площади, и

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

— в случае площади фиксированной фигуры $ABCD$, отвечающей изменению x от a до b.

Мы воспользовались интуитивным представлением о площади, чтобы естественно подойти к рассмотрению пределов своеобразных сумм вида (2), которые исторически и были введены в связи с задачей о вычислении площади. Однако самое понятие площади нуждается в обосновании, и — если речь идет о криволинейной трапеции — оно достигается именно с помощью упомянутых пределов. Разумеется, этому должно быть предпослано изучение пределов (2) самих по себе, вне связи с геометрическими представлениями, чему и посвящена настоящая глава.

Пределы вида (2) играют исключительно важную роль в математическом анализе и в разнообразных его приложениях. К тому же в различных видоизменениях развиваемые здесь идеи будут неоднократно повторяться на всем протяжении курса.

*) Термин «интеграл» (от латинского integer = целый) был предложен учеником и сподвижником Лейбница Иоганном Бернулли; сам Лейбниц первоначально говорил: «сумма всех $y\,dx$».

176. Определение. Пусть функция $f(x)$ задана в некотором промежутке $[a, b]$. Разобьем этот промежуток произвольным образом на части, вставив между a и b точки деления (1). Наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ будем впредь обозначать через λ.

Возьмем в каждом из частичных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ по произволу точку $x = \xi_i$ *)

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Установим теперь понятие (конечного) предела этой суммы:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma. \tag{3}$$

Представим себе, что промежуток $[a, b]$ последовательно разбивается на части, сначала одним способом, затем — вторым, третьим и т. д. Такую последовательность разбиений промежутка на части мы будем называть основной, если соответствующая последовательность значений $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ сходится к нулю.

Равенство (3) мы понимаем в том смысле, что *последовательность значений суммы σ, отвечающая любой основной последовательности разбиений промежутка, всегда стремится к пределу I, как бы ни выбирать при этом ξ_i.*

Можно и здесь дать определение предела «на языке ε-δ». Именно, говорят, что *сумма σ при $\lambda \to 0$ имеет предел I, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что, лишь только $\lambda < \delta$ (т. е. основной промежуток разбит на части, с длинами $\Delta x_i < \delta$), неравенство*

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

выполняется при любом выборе чисел ξ.

Доказательство равносильности обоих определений может быть проведено в том же порядке идей, что и в n°**33**. Первое определение «на языке последовательностей» позволяет перенести основные понятия и предложения теории пределов и на этот новый вид предела.

---

*) Выше мы в качестве ξ_i брали во всех случаях наименьшее значение x_i.

Конечный предел I суммы σ при $\lambda \to 0$ называется о п р е д е л е н н ы м и н т е г р а л о м *функции $f(x)$ в промежутке от a до b* и обозначается символом *)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx; \tag{4}$$

в этом случае функция $f(x)$ называется и н т е г р и р у е м о й в промежутке $[a, b]$.

Числа a и b носят название, соответственно, н и ж н е г о и в е р х н е г о п р е д е л о в интеграла. При постоянных пределах определенный интеграл представляет собой постоянное число.

Приведенное общее определение принадлежит Риману, который впервые высказал его в общей форме и исследовал область его применения. И самую сумму σ иногда называют р и м а н о в о й с у м м о й, хотя на деле еще Коши отчетливо пользовался пределами подобных сумм для случая непрерывной функции. Мы же будем предпочтительно называть ее и н т е г р а л ь н о й с у м м о й, чтобы подчеркнуть ее связь с интегралом.

Поставим теперь себе задачей выяснить условия, при которых интегральная сумма σ имеет конечный предел, т. е. существует определенный интеграл (4).

Прежде всего заметим, что высказанное определение в действительности может быть приложено лишь к о г р а н и ч е н н о й функции. В самом деле, если бы функция $f(x)$ была в промежутке $[a, b]$ неограничена, то — при любом разбиении промежутка на части — она сохранила бы подобное свойство хоть в одной из частей. Тогда за счет выбора в этой части точки ξ можно было бы сделать $f(\xi)$, а с ней и сумму σ, сколь угодно большой; при этих условиях конечного предела для σ, очевидно, существовать не могло бы. Итак, *интегрируемая функция необходимо ограничена.*

Поэтому в дальнейшем исследовании мы будем н а п е р е д предполагать рассматриваемую функцию $f(x)$ о г р а н и ч е н н о й:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \text{если} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

177. Суммы Дарбу. В качестве вспомогательного средства исследования, наряду с интегральными суммами, введем в рассмотрение, по примеру Дарбу **), еще другие, сходные с ними, но более простые суммы.

---

*) Это обозначение для определенного интеграла ввел французский математик и физик Жан Баптист Жозеф Ф у р ь е (1768—1830). Эйлер писал более громоздко:

$$\int P\,dx \begin{bmatrix} \text{от} & x = a \\ \text{до} & x = b \end{bmatrix}.$$

**) Гастон Д а р б у (1842—1917) — французский математик.

Обозначим через m_i и M_i, соответственно, точные нижнюю и верхнюю границы функции $f(x)$ в i-м промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ и составим суммы

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Эти суммы и носят название, соответственно, нижней и верхней (интегральных) сумм, или сумм Дарбу.

В частном случае, когда $f(x)$ непрерывна, они являются просто наименьшей и наибольшей из интегральных сумм, отвечающих взятому разбиению, так как в этом случае функция $f(x)$ в каждом промежутке достигает своих точных границ, и точки ξ_i можно выбрать так, чтобы — по желанию — было

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{или} \quad f(\xi_i) = M_i.$$

Переходя к общему случаю, из самого определения нижней и верхней границ имеем

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i.$$

Умножив члены обоих этих неравенств на Δx_i (Δx_i положительно) и просуммировав по i, получим

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

При фиксированном разбиении суммы s и S будут постоянными числами, в то время как сумма σ еще остается переменной ввиду произвольности чисел ξ_i. Но легко видеть, что за счет выбора ξ_i можно значения $f(\xi_i)$ сделать сколь угодно близкими как к m_i, так и к M_i, а значит — сумму σ сделать сколь угодно близкой к s или к S. А тогда предыдущие неравенства приводят к следующему уже общему замечанию: *при данном разбиении промежутка суммы Дарбу s и S служат точными, соответственно, нижней и верхней границами для интегральных сумм.*

Суммы Дарбу обладают следующими простыми свойствами:

Первое свойство. *Если к имеющимся точкам деления добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу может от этого разве лишь возрасти, а верхняя сумма — разве лишь уменьшиться.*

Доказательство. Для доказательства этого свойства достаточно ограничиться присоединением к уже имеющимся точкам деления еще одной точки деления x'.

Пусть эта точка попадает между точками x_k и x_{k+1}, так что

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

Если через S' обозначить новую верхнюю сумму, то от прежней S она будет отличаться только тем, что в сумме S промежутку $[x_k, x_{k+1}]$ отвечало слагаемое

$$M_k(x_{k+1} - x_k),$$

а в новой сумме S' этому промежутку отвечает сумма двух слагаемых

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x'),$$

где $\overline{M}_k$ и $\overline{\overline{M}}_k$ суть точные верхние границы функции $f(x)$ в промежутках $[x_k, x']$ и $[x', x_{k+1}]$. Так как эти промежутки являются частями промежутка $[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\overline{M}_k \leqslant M_k, \quad \overline{\overline{M}}_k \leqslant M_k,$$

так что

$$\overline{M}_k(x'-x_k) \leqslant M_k(x'-x_k), \quad \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x') \leqslant M_k(x_{k+1}-x').$$

Складывая эти неравенства почленно, получим

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x') \leqslant M_k(x_{k+1}-x_k).$$

Отсюда и следует, что $S' \leqslant S$. Для нижней суммы доказательство аналогично этому.

В т о р о е с в о й с т в о. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому разбиению промежутка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем промежуток $[a, b]$ произвольным образом на части и составим для этого разбиения суммы Дарбу

$$s_1 \text{ и } S_1. \tag{I}$$

Рассмотрим теперь некоторое другое, никак не связанное с первым, разбиение промежутка $[a, b]$. Ему также будут отвечать его суммы Дарбу

$$s_2 \text{ и } S_2. \tag{II}$$

Требуется доказать, что $s_1 \leqslant S_2$. С этой целью, объединим те и другие точки деления; тогда получим некоторое третье, вспомогательное, разбиение, которому будут отвечать суммы

$$s_3 \text{ и } S_3. \tag{III}$$

Третье разбиение мы получили из первого д о б а в л е н и е м н о в ы х т о ч е к д е л е н и я; поэтому, на основании доказанного первого свойства сумм Дарбу, имеем

$$s_1 \leqslant s_3.$$

Сопоставив теперь второе и третье разбиения, точно так же заключаем, что

$$S_3 \leqslant S_2.$$

Но $s_3 \leqslant S_3$, поэтому из только что полученных неравенств вытекает

$$s_1 \leqslant S_2,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что всё множество $\{s\}$ нижних сумм ограничено сверху, например, любой верхней суммой S. В таком случае [п° 6] это множество имеет конечную т о ч н у ю верхнюю границу

$$I_* = \sup \{s\}$$

и, кроме того,

$$I_* \leqslant S,$$

какова бы ни была верхняя сумма S. Так как множество верхних сумм, таким образом, оказывается ограниченным снизу числом I_*, то оно имеет конечную т о ч н у ю нижнюю границу

$$I^* = \inf \{S\},$$

причем, очевидно,

$$I_* \leqslant I^*.$$

Сопоставляя все сказанное, имеем

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S \tag{5}$$

для любых нижней и верхней сумм Дарбу.

178. Условие существования интеграла. С помощью сумм Дарбу теперь легко сформулировать это условие.

Теорема. *Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0. \tag{6}$$

Сказанное в n° 176 достаточно для уяснения смысла этого предела. Например, «на языке ε-δ», условие (6) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что лишь только $\lambda < \delta$ (т. е. промежуток разбит на части с длинами $\Delta x_i < \delta$), тотчас выполняется неравенство

$$S - s < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что существует интеграл (4). Тогда по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что лишь только все $\Delta x_i < \delta$, тотчас

$$|\sigma - I| < \varepsilon \quad \text{или} \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

как бы мы ни выбирали ξ_i в пределах соответствующих промежутков. Но суммы s и S, при заданном разбиении промежутка, являются, как мы установили, для интегральных сумм, соответственно, т о ч н ы м и нижней и верхней границами; поэтому для них будем иметь

$$I - \varepsilon \leqslant s \leqslant S \leqslant I + \varepsilon,$$

так что

$$\lim_{\lambda \to 0} s = I, \quad \lim_{\lambda \to 0} S = I, \tag{7}$$

откуда и следует (6).

Достаточность. Предположим, что условие (6) выполнено; тогда из (5) сразу ясно, что $I_* = I^*$ и, если обозначить их общее значение через I,

$$s \leqslant I \leqslant S. \tag{5*}$$

Если под σ разуметь одно из значений интегральной суммы, отвечающих тому же разбиению промежутка, что и суммы s, S, то, как мы знаем,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Согласно условию (6), если предположить все Δx_i достаточно малыми, суммы s и S разнятся меньше, чем на произвольно взятое $\varepsilon > 0$. Но в таком случае это справедливо и относительно заключенных между ними чисел σ и I:

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

так что I является пределом для σ, т. е. определенным интегралом.

Если обозначить колебание $M_i - m_i$ функции в i-м частичном промежутке через ω_i, то будем иметь

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

и условие существования определенного интеграла может быть переписано так:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0. \tag{8}$$

В этой форме оно обычно и применяется.

179. Классы интегрируемых функций. Применим найденный нами признак к установлению некоторых классов интегрируемых функций.

I. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то она интегрируема.*

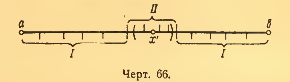
Доказательство. Раз функция $f(x)$ непрерывна, то на основании следствия из теоремы Кантора [n°**75**] по заданному $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое $\delta > 0$, что лишь только промежуток $[a, b]$ разбит на части с длинами $\Delta x_i < \delta$, то все $\omega_i < \varepsilon$. Отсюда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon (b - a).$$

Так как $b - a$ есть постоянное число, а ε произвольно мало, то условие (8) выполняется, а из него вытекает существование интеграла. Можно несколько обобщить доказанное утверждение.

II. *Если ограниченная функция $f(x)$ в $[a, b]$ имеет лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема.*

Доказательство ограничим случаем, когда между a и b содержится лишь одна точка разрыва x' (черт. 66). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Окружим точку x' окрестностью $(x'-\varepsilon,\ x'+\varepsilon)$. В двух оставшихся (замкнутых) промежутках функция $f(x)$ будет непрерывной, и мы можем применить к каждому из них в отдельности следствие из теоремы Кантора. Из полученных по ε двух чисел δ выберем наименьшее (его мы также будем обозначать буквой δ). Тогда оно будет годиться для каждого из указанных выше промежутков. Ничто нам не мешает взять вдобавок $\delta < \varepsilon$. Разобьем теперь наш промежуток $[a, b]$ произвольно на части так, чтобы их длины Δx_i все были меньше δ. Полученные частичные промежутки будут двух родов:



Черт. 66.

I) промежутки, лежащие целиком вне выделенной окрестности точки разрыва. В них колебание функции $\omega_i < \varepsilon$;

II) промежутки, либо заключенные целиком внутри выделенной окрестности, либо частью на эту окрестность налегающие.

Так как функция $f(x)$ предположена ограниченной, то колебание ее в любом из этих промежутков не превосходит ее колебания Ω во всем промежутке $[a, b]$.

Сумму

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

разобьем на две:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \quad \text{и} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''},$$

распространенные, соответственно, на промежутки первого и второго рода.

Для первой суммы, как и в предыдущей теореме, будем иметь

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon (b-a).$$

Что касается второй суммы, то заметим, что длины промежутков второго рода, целиком попавших внутрь выделенной окрестности, в сумме меньше или равны 2ε; промежутков же, лишь частично налегающих на них, может быть не больше двух, и сумма их длин меньше 2δ, а значит и подавно меньше 2ε. Следовательно,

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 4\varepsilon.$$

Таким образом, окончательно, при $\Delta x_i < \delta$ имеем:

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \varepsilon [(b-a) + 4\Omega].$$

Это и доказывает наше утверждение, так как в квадратных скобках содержится постоянное число, а ε произвольно мало.

Наконец, укажем еще один простой класс интегрируемых функций, не покрывающийся предыдущим.

III. *Монотонная ограниченная функция $f(x)$ всегда интегрируема.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — монотонно возрастающая функция. Тогда ее колебание в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ будет

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

Зададимся любым $\varepsilon > 0$ и положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Как только $\Delta x_i < \delta$, тотчас будем иметь

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon,$$

откуда и следует интегрируемость функции.

Замечание. Отметим, что *изменение значений интегрируемой функции в конечном* (равном k) *числе точек не отразится ни на существовании, ни на величине интеграла.*

Так как упомянутое изменение коснется не более, чем k членов суммы $\sum \omega_i \Delta x_i$, то при $\lambda \to 0$ сумма попрежнему будет стремиться к нулю. Что же касается до значения самого интеграла, то для обеих функций — исходной и измененной — точки ξ_i в интегральной сумме всегда можно выбирать так, чтобы они не совпадали с теми точками, для которых их значения разнятся.

§ 2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

180. Интеграл по ориентированному промежутку. До сих пор, говоря об «определенном интеграле в промежутке от a до b», мы всегда подразумевали, что $a < b$. Устраним теперь это стеснительное ограничение.

С этой целью мы, прежде всего, установим понятие направленного или ориентированного промежутка. *Под ориентированным промежутком* $[a, b]$ (где может быть и $a < b$ и $a > b$) *мы будем разуметь множество значений x, удовлетворяющих неравенствам, соответственно,*

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{или} \quad a \geqslant x \geqslant b$$

и расположенных или упорядоченных от a к b, т. е. в порядке возрастания, если $a<b$, или убывания, если $a>b$. Таким образом, мы различаем промежутки $[a, b]$ и $[b, a]$: совпадая по своему составу (как числовые множества), они разнятся по направлению.

Можно сказать, что то определение интеграла, которое было дано в n°**176**, относится к ориентированному промежутку $[a, b]$ лишь для случая, когда $a<b$.

Обратимся к определению интеграла в ориентированном промежутке $[a, b]$ в предположении, что $a>b$. Можно повторить для этого случая обычный процесс дробления промежутка, вставляя точки деления в направлении от a к b:

$$x_0=a>x_1>x_2> \ldots >x_i>x_{i+1}> \ldots >x_n=b.$$

Выбрав в каждом частичном промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ по точке ξ_i, так что $x_i \geqslant \xi_i \geqslant x_{i+1}$, составим интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где — на этот раз — все $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i<0$. Наконец, предел этой суммы при $\lambda=\max \Delta x_i \to 0$ и приведет нас к понятию интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0} \sigma.$$

Если для промежутков $[a, b]$ и $[b, a]$ (где $a \gtrless b$) взять те же точки деления и те же точки ξ, то отвечающие им интегральные суммы будут разниться лишь знаками. Отсюда, переходя к пределам, получаем такое предложение:

1°. *Если $f(x)$ интегрируема в промежутке* $[a, b]$, то *она интегрируема и в промежутке* $[b, a]$, *причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Впрочем, можно было бы именно это равенство принять за определение интеграла $\int_a^b$ при $a>b$ в предположении, что интеграл $\int_b^a$ существует.

Заметим еще, что по определению же полагают

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

181. Свойства, выражаемые равенствами. Перечислим дальнейшие свойства определенных интегралов, выражаемые равенствами *).

2°. *Пусть* $f(x)$ *интегрируема в наибольшем из промежутков* $[a, b]$, $[a, c]$ *и* $[c, b]$ **). *Тогда она интегрируема в двух других, и имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b *и* c.

Доказательство. Положим сначала, что $a < c < b$ и функция интегрируема в промежутке $[a, b]$.

Рассмотрим разбиение промежутка $[a, b]$ на части, причем точку c будем считать одной из точек деления. Тогда, прежде всего,

$$\sum_a^b \omega\,\Delta x = \sum_a^c \omega\,\Delta x + \sum_c^b \omega\,\Delta x \text{ ***)}$$

и — ввиду положительности всех слагаемых — из стремления к нулю суммы слева следует то же и для сумм справа, так что интегрируемость функции $f(x)$ в промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$ установлена. А теперь, очевидно,

$$\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\,\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\,\Delta x.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, мы получим требуемое равенство.

Другие случаи расположения точек a, b, c приводятся к этому. Пусть, например, $b < a < c$ и функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[c, b]$ или — что то же, ввиду 1°, — в промежутке $[b, c]$. В этом случае, по доказанному, будем иметь

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx,$$

*) Здесь и впредь, если речь идет об интеграле $\int_a^b$, мы считаем возможным (при отсутствии специальной оговорки) оба случая: $a < b$ и $a > b$.

**) Вместо этого можно было бы предположить, что функция $f(x)$ интегрируема в каждом из двух меньших промежутков: тогда она была бы интегрируема и в большем.

***) Смысл обозначений ясен сам собою.

откуда, перенося первый и второй интегралы из одной части равенства в другую и переставив пределы (на основании свойства 1°), придем опять к прежнему соотношению.

3°. *Если* $f(x)$ *интегрируема в промежутке* $[a, b]$, *то и* $k \cdot f(x)$ (*где* $k = \text{const}$) *также интегрируема в этом промежутке, причем*

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

4°. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ — *обе интегрируемы в промежутке* $[a, b]$, *то и* $f(x) \pm g(x)$ *также интегрируема в этом промежутке, причем*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

В обоих случаях доказательство строится аналогично, с помощью перехода к пределу в интегральных суммах. Проведем его, например, для последнего утверждения.

Разобьем промежуток $[a, b]$ произвольно на части и составим интегральные суммы для всех трех интегралов. При этом точки ξ_i в каждом частичном промежутке выбираем произвольно, но для всех сумм одни и те же; тогда будем иметь

$$\sum [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Пусть теперь $\lambda \to 0$; так как для обеих сумм справа пределы существуют, то существует предел и для суммы слева, чем устанавливается интегрируемость функции $f(x) \pm g(x)$. Переходя в предыдущем равенстве к пределам, приходим к требуемому соотношению.

182. Свойства, выражаемые неравенствами. До сих пор мы рассматривали свойства интегралов, выражаемые равенствами; перейдем теперь к таким, которые выражаются неравенствами.

5°. *Если функция* $f(x)$, *интегрируемая в промежутке* $[a, b]$, *неотрицательна и* $a < b$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Доказательство очевидно.

Простым следствием отсюда (и из 4°) является

6°. *Если обе функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы в промежутке* $[a, b]$ *и всегда* $f(x) \leqslant g(x)$, *то и*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

в предположении, что $a < b$.

Нужно лишь применить предыдущее свойство к разности $g(x) - f(x)$.

7°. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема в промежутке* $[a, b]$ и $a < b$; *тогда и функция* $|f(x)|$ *интегрируема в этом промежутке, и имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Прежде всего убедимся в существовании интеграла от $|f(x)|$. Если в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ взять любые две точки x' и x'', то [n° **8**]

$$\big||f(x'')| - |f(x')|\big| \leqslant |f(x'') - f(x')|.$$

Поэтому, обозначив через ω_i^* колебание функции $|f(x)|$ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, по определению колебания [n° **73**], будем иметь $\omega_i^* \leqslant \omega_i$, так что

$$0 \leqslant \sum \omega_i^* \Delta x_i \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i \text{ *)},$$

и стремление к нулю суммы справа влечет за собой то же для суммы слева.

Самое же неравенство легко получить непосредственно, исходя из интегральных сумм

$$\left|\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \leqslant \sum |f(\xi_i)|\,\Delta x_i \text{ *)}$$

и переходя к пределам.

8°. *Если* $f(x)$ *интегрируема в* $[a, b]$, *где* $a < b$, *и если во всем этом промежутке имеет место неравенство*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

то

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a).$$

Можно применить свойство 6° к функциям m, $f(x)$ и M, но проще непосредственно воспользоваться очевидными неравенствами

$$m \sum \Delta x_i \leqslant \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant M \sum \Delta x_i$$

и перейти к пределу.

---

*) Так как $a < b$, то все $\Delta x_i > 0$.

Доказанным соотношениям можно придать более удобную форму равенства, освобождаясь в то же время от ограничения $a < b$.

9°. ***Теорема о среднем значении.*** *Пусть* $f(x)$ *интегрируема в* $[a, b]$ $(a \lesseqgtr b)$ *и пусть во всем этом промежутке* $m \leqslant f(x) \leqslant M$; *тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Доказательство. Если $a < b$, то по свойству 8° будем иметь

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Положив

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu,$$

получаем требуемое равенство.

Для случая, когда $a > b$, проводим то же рассуждение для $\int_b^a$, а затем, переставив пределы, приходим к прежней формуле.

Только что доказанное равенство принимает особенно простой вид, когда функция $f(x)$ непрерывна. Действительно, если считать, что m и M суть наибольшее и наименьшее значения функции, существующие по теореме Вейерштрасса [n° **73**], то и промежуточное значение μ, по теореме Больцано — Коши [n° **70**], должно приниматься функцией $f(x)$ в некоторой точке c промежутка $[a, b]$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c),$$

где c содержится в $[a, b]$.

Черт. 67.

Геометрический смысл последней формулы ясен. Пусть $f(x) \geqslant 0$. Рассмотрим криволинейную фигуру $ABCD$ (черт. 67) под кривой $y = f(x)$. Тогда площадь криволинейной фигуры (выражаемая определенным интегралом) равна площади прямоугольника с тем же основанием и с некоторой средней ординатой LM в качестве высоты.

10°. ***Обобщенная теорема о среднем значении.*** *Пусть:* 1) $g(x)$ *и произведение* $f(x) \cdot g(x)$ интегрируемы в промежутке

$[a, b]$; 2) $m \leqslant f(x) \leqslant M$; 3) $g(x)$ *во всем промежутке не меняет знака*: $g(x) \geqslant 0$ $[g(x) \leqslant 0]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = \mu \int_a^b g(x) \, dx,$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Доказательство. Пусть сначала $g(x) \geqslant 0$ и $a < b$; тогда имеем

$$mg(x) \leqslant f(x) g(x) \leqslant Mg(x).$$

Из этого неравенства, на основании свойств 6° и 3°, получаем

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leqslant \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leqslant M \int_a^b g(x) \, dx.$$

Ввиду предположения о функции $g(x)$, по 5° имеем

$$\int_a^b g(x) \, dx \geqslant 0.$$

Если этот интеграл равен нулю, то из предыдущих неравенств ясно, что одновременно также

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = 0,$$

и утверждение теоремы становится очевидным. Если же интеграл больше нуля, то, разделив на него все части полученного выше двойного неравенства, положим

$$\frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} = \mu$$

и придем к требуемому результату.

На самом деле ограничения, что $a < b$ и $g(x) \geqslant 0$, не нужны: перестановка пределов или изменение знака $g(x)$ не нарушат равенства.

Если $f(x)$ непрерывна, то эта формула может быть записана следующим образом:

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx,$$

где c содержится в $[a, b]$.

Замечание. Переменную интегрирования мы постоянно обозначали буквой x; но, разумеется, ничто не изменилось бы, если бы,

вместо x, мы пользовались какой-нибудь другой буквой, лишь бы сохранились пределы a и b, между которыми переменная меняется, и подинтегральная функция f. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ означает ровно то же число, что и $\int_a^b f(t)\,dt$ или $\int_a^b f(z)\,dz$ и т. п. Этим очевидным замечанием мы сейчас воспользуемся.

183. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$ $(a \gtrless b)$, то [181, 2°] она интегрируема и в промежутке $[a, x]$, где x есть любое значение из $[a, b]$. Заменив предел b определенного интеграла переменной x, получим выражение

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,^{*)}, \tag{1}$$

которое, очевидно, является функцией от x. Эта функция обладает следующими свойствами:

11°. *Если функция $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$, то $\Phi(x)$ будет непрерывной функцией от x в том же промежутке.*

Доказательство. Придав x произвольное приращение $\Delta x = h$ с тем лишь, чтобы $x+h$ не выходило за пределы рассматриваемого промежутка, получим новое значение функции (1)

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x + \int_x^{x+h}$$

[см. 2°], так что

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Применим к этому интегралу теорему о среднем значении 9°:

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \mu h; \tag{2}$$

здесь μ содержится между точными границами m' и M' функции $f(x)$ в промежутке $[x, x+h]$, а следовательно, и подавно между (постоянными) границами ее m и M в основном промежутке $[a, b]$ **).

Если устремить теперь h к нулю, то, очевидно,

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \to 0 \quad \text{или} \quad \Phi(x+h) \to \Phi(x),$$

что и доказывает непрерывность функции $\Phi(x)$.

---

*) Переменную интегрирования мы обозначили здесь через t, чтобы не смешивать ее с верхним пределом x.

**) Напомним, что интегрируемая функция ограничена [n° 176].

12°. *Если функцию* $f(t)$ *предположить* *непрерывной* *в точке* $t=x$, *то в этой точке функция* $\Phi(x)$ *имеет производную, равную*

$$\Phi'(x)=f(x)\ ^{*}).$$

Доказательство. Действительно, из (2) имеем

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\mu, \quad \text{где} \quad m'\leqslant\mu\leqslant M'.$$

Но, ввиду непрерывности функции $f(t)$ при $t=x$, по любому $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $|h|<\delta$

$$f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon$$

для всех значений t в промежутке $[x, x+h]$. В таком случае имеют место и неравенства [6]

$$f(x)-\varepsilon\leqslant m'\leqslant M'\leqslant f(x)+\varepsilon,$$

так что и

$$f(x)-\varepsilon\leqslant\mu\leqslant f(x)+\varepsilon \quad \text{или} \quad |\mu-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Теперь ясно, что

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\mu=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Мы пришли к заключению, имеющему огромное принципиальное и прикладное значение. Если предположить функцию $f(x)$ непрерывной во всем промежутке $[a, b]$, то она интегрируема [п° **179**, I] и предыдущее утверждение оказывается приложимым к любой точке x этого промежутка: *производная от интеграла* (1) *по переменному верхнему пределу* x *везде равна значению* $f(x)$ *подинтегральной функции на этом пределе.*

Иными словами, *для* *непрерывной* *в промежутке* $[a, b]$ *функции* $f(x)$ *всегда существует* *первообразная*; *примером ее является определенный интеграл* (1) *с переменным верхним пределом.*

Таким образом, мы, наконец, установили то предложение, о котором упоминали еще в п° **156**.

В частности, мы теперь можем записать функции F и E Лежандра [**174**] в виде определенных интегралов:

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

---

*) Это важное предложение — для функции, непрерывной во всем промежутке, — впервые строго доказал Коши (в 1823 г.).

Если вспомнить геометрическое истолкование определенного интеграла как площади [п° **175**], то теорема 12° отождествится с так называемой теоремой Ньютона и Лейбница [п° **156**].

По доказанному только что, это будут первообразные функции, соответственно, для функций

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

и притом обращающиеся в нуль при $\varphi=0$.

Замечание. Утверждения, доказанные в настоящем номере, легко распространяются на случай интеграла с переменным нижним пределом, так как вследствие 1°

$$\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt.$$

Производная от этого интеграла по x, очевидно, равна $-f(x)$, если x есть точка непрерывности.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

184. Вычисление с помощью интегральных сумм. Приведем примеры вычисления определенного интеграла, непосредственно как предела интегральных сумм — в согласии с его определением. Зная наперед, что интеграл для непрерывной функции существует, для вычисления его мы можем выбирать разбиение промежутка и точки ξ, руководствуясь исключительно соображениями удобства.

1) $\int_a^b \sin x\,dx$. Разделив промежуток $[a, b]$ на n равных частей, положим $h=\frac{b-a}{n}$; функцию $\sin x$ вычислим для правых концов, если $a<b$, и для левых при $a>b$. Тогда

$$\sigma_n = h\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih).$$

Найдем сжатое выражение для суммы справа. Умножив и разделив ее на $2\sin\frac{h}{2}$, а затем представляя все слагаемые в виде разности косинусов, легко получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}h\right)-\cos\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}h\right)\right] =$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}. \qquad (1)$$

Таким образом,

$$\sigma_n = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right].$$

Так как $h \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\int_a^b \sin x\,dx = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right] = \cos a - \cos b.$$

2) $\int_a^b x^\mu\,dx$ $(b > a > 0;\ \mu$ — произвольное вещественное число).

На этот раз мы разобьем промежуток $[a, b]$ на неравные части, а именно между a и b вставим $n-1$ средних геометрических. Иными словами, положив

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

рассмотрим ряд чисел

$$a,\ aq, \ldots,\ aq^i, \ldots,\ aq^n = b.$$

Заметим, что при $n \to \infty$ отношение $q = q_n \to 1$, разности же $aq^{i+1} - aq^i$ все меньше величины $b(q-1) \to 0$.

Вычисляя функцию для левых концов, имеем

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^\mu (aq^{i+1} - aq^i) = a^{\mu+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^{\mu+1})^i.$$

Предположим сначала, что $\mu \neq -1$; тогда

$$\sigma_n = a^{\mu+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1}-1}{q^{\mu+1}-1} = (b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}$$

и, используя уже известный предел [n°65, 3)], получим

$$\int_a^b x^\mu\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = (b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1} = \frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

В случае же $\mu = -1$ будет

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right),$$

и на основании другого известного результата [там же, 2)]

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right) = \ln b - \ln a.$$

185. Основная формула интегрального исчисления. Мы видели в n° 183, что для непрерывной в промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

оказывается первообразной функцией. Если $F(x)$ есть любая первообразная для $f(x)$ функция [например, найденная методами § 1—4 предыдущей главы], то [n° 155]

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Постоянную C легко определить, положив здесь $x = a$, ибо $\Phi(a) = 0$; будем иметь

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \quad \text{откуда} \quad C = -F(a).$$

Окончательно

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

В частности, при $x = b$ получим

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{A}$$

Это — *основная формула интегрального исчисления* *).

Итак, *значение определенного интеграла выражается разностью двух значений, при $x = b$ и при $x = a$, любой первообразной функции.*

Формула (A) дает эффективное и простое средство для вычисления определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$. Ведь для ряда простых классов таких функций мы умеем выражать первообразную в конечном виде через элементарные функции. В этих случаях определенный интеграл вычисляется непосредственно по основной формуле. Заметим лишь, что разность справа обычно изображают символом $F(x)\Big|_a^b$ («двойная подстановка от a до b») и формулу пишут в виде

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{A*}$$

*) Рассуждения здесь вполне аналогичны тем, которыми мы пользовались в n° 156 при вычислении функции $P(x)$ и площади P. Сама формула (A) легко могла бы быть получена сопоставлением результатов n° 156 и n° 175.

Так, например, сразу находим:

1) $\int_a^b \sin x\,dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b$,

2) $\int_a^b x^\mu\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1)$,

3) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a \quad (a>0,\quad b>0)$

— результаты, не без труда полученные нами в предыдущем номере.

186. Формула замены переменной в определенном интеграле. Та же основная формула (A) позволит нам установить правило замены переменной под знаком определенного интеграла.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ непрерывная в промежутке $[a, b]$ функция. Положим $x=\varphi(t)$, подчинив функцию $\varphi(t)$ условиям:

1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна в некотором промежутке $[\alpha, \beta]$ и ее значения не выходят за пределы промежутка $[a, b]$ *), когда t изменяется в $[\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

3) существует в $[\alpha, \beta]$ непрерывная производная $\varphi'(t)$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Ввиду предположенной непрерывности подинтегральных функций существуют не только эти определенные интегралы, но и соответствующие им неопределенные, и в обоих случаях можно воспользоваться основной формулой. Но если $F(x)$ будет одной из первообразных для дифференциала $f(x)\,dx$, то функция $\Phi(t)=F(\varphi(t))$, как мы знаем, будет первообразной для дифференциала $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ [ср. n°160]. Поэтому имеем одновременно

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

*) Может случиться, что функция $f(x)$ определена и непрерывна в более широком, чем $[a, b]$, промежутке $[A, B]$, тогда достаточно потребовать, чтобы значения $\varphi(t)$ не выходили за пределы промежутка $[A, B]$.

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

откуда и вытекает доказываемое равенство.

Замечание. Отметим одну важную особенность формулы (2). В то время, как при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной, получив искомую функцию выраженной через переменную t, мы должны были возвращаться к старой переменной x, здесь в этом нет надобности. Если вычислен второй из определенных интегралов (2), который представляет собой число, то тем самым вычислен и первый.

Примеры. 1) Найдем интеграл $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ с помощью подстановки $x = a \sin t$; роль α и β здесь играют значения 0 и $\frac{\pi}{2}$. Имеем:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

[ср. n° 160].

2) Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}.$$

Последний интеграл подстановкой $x = \pi - t$ $\left(\text{где } t \text{ изменяется от } \frac{\pi}{2} \text{ до } 0\right)$ приводится к виду

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt$$

и представляется в виде разности

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt.$$

Подставляя, после сокращений, получим:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt = -\pi \operatorname{arctg}(\cos t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

187. Интегрироваиие по частям в определениом интеграле. Мы имели в n° **162** формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{3}$$

в предположении, что функции u, v от независимой переменной x непрерывны в рассматриваемом промежутке $[a, b]$ вместе со своими производными u', v'. Теперь, с помощью все той же основной формулы (А), мы преобразуем формулу (3) в аналогичную формулу уже в определенных интегралах, сводящую вычисление одного определенного интеграла к вычислению другого (вообще более простого).

Обозначим последний интеграл в формуле (3) через $\varphi(x)$. Тогда — по формуле (А):

$$\int_a^b u\,dv = [uv - \varphi(x)]\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \varphi(x)\Big|_a^b.$$

Так как в то же время, в силу (А),

$$\int_a^b v\,du = \varphi(x)\Big|_a^b,$$

то и приходим окончательно к формуле

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{4}$$

Формула (4), устанавливающая соотношение между ч и с л а м и, принципиально проще формулы (3), в которой участвуют ф у н к ц и и; она особенно выгодна, если двойная подстановка равна нулю.

П р и м е р. Вычислить интегралы

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx, \quad J'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$$

при натуральном m.

Интегрируя по частям, найдем:

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\,d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Двойная подстановка обращается в нуль. Заменяя $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$, получим

$$J_m = (m-1)\,J_{m-2} - (m-1)\,J_m,$$

откуда р е к у р р е н т н а я ф о р м у л а:

$$J_m = \frac{m-1}{m}\,J_{m-2},$$

по которой интеграл J_m последовательно приводится к J_0 или J_1. Именно, при $m=2n$ имеем:

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

если же $m=2n+1$, то

$$J_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx=\frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}.$$

Такие же точно результаты получаются и для J'_m *).

Для более короткой записи найденных выражений введем символ $m!!$, который означает произведение натуральных чисел, не превосходящих m и *одной с ним четности* (так что, например, $6!!=2\cdot 4\cdot 6$, а $7!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$). Тогда можно будет написать

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{при } m \text{ четном}\\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при } m \text{ нечетном.}\end{cases} \qquad (5)$$

188. Формула Валлиса. Из формулы (5) легко вывести знаменитую *формулу Валлиса*, которая была опубликована в 1655 г. в его «Арифметике бесконечных величин».

Предполагая $0<x<\frac{\pi}{2}$, имеем неравенства

$$\sin^{2n+1} x<\sin^{2n} x<\sin^{2n-1} x.$$

Проинтегрируем эти неравенства в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx.$$

Отсюда, в силу (5), находим

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}.$$

Так как разность между двумя крайними выражениями

$$\frac{1}{(2n+1)\,2n}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2<\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

очевидно, стремится к нулю при $n\to\infty$, то $\frac{\pi}{2}$ является их общим пределом. Итак,

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}$$

*) Заметим, что J'_m переходит в J_m с помощью подстановки $x=\frac{\pi}{2}-t$.

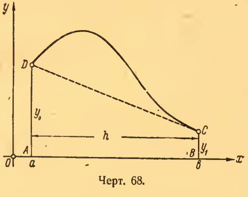
или

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}.$$

Это и есть *формула Валлиса* *). Она имеет исторический интерес как первое представление числа π в виде предела легко вычисляемой рациональной переменной. В теоретических исследованиях ею пользуются и сейчас, но для приближенного вычисления числа π теперь существуют методы, гораздо более быстро ведущие к цели.

§ 4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

189. Формула трапеций. Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ есть некоторая заданная в промежутке $[a, b]$ непрерывная функция. В § 3 мы вычисляли подобный интеграл преимущественно по формуле (А), с помощью первообразной. Но первообразная в конечном виде выражается лишь для узкого класса функций; за его пределами обычно приходится прибегать к различным методам приближенного вычисления. Эти методы дают приближенное выражение для интеграла через значения подинтегральной функции, вычисленные для ряда значений независимой переменной. В простейших случаях получение такого выражения облегчается геометрическими соображениями, поскольку определенный интеграл может быть истолкован как площадь «криволинейной трапеции» $ABCD$ (черт. 68), ограниченной кривою $y=f(x)$ [n° 175], и наша задача сводится к приближенному вычислению такой площади.



Черт. 68.

Прежде всего, естественно заменить кривую CD ее хордой, а криволинейную трапецию — обыкновенной трапецией. Для определения площади последней достаточно знать лишь начальную и конечную ординаты

$$f(a)=y_0, \quad f(b)=y_1$$

*) В оригинале дана формула для $\frac{4}{\pi}$.

и основание $b-a=h$. Таким образом мы приходим к приближенной формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{h}{2}(y_0+y_1). \tag{1}$$

Конечно, эта формула дает лишь грубое приближение. Для получения более точной формулы разобьем промежуток $[a, b]$ точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на n равных частичных промежутков

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, b] \tag{2}$$

и проведем соответствующие взятым точкам ординаты; они разобьют нашу фигуру на n полосок, каждую из которых мы приближенно заменим трапецией, подобно тому как выше сделали это со всей фигурой (черт. 69).

Так как высоты всех трапеций равны $\frac{h}{n}$, то, полагая

$$f(a)=y_0,\quad f(x_1)=y_1,\ \ldots,\quad f(x_{n-1})=y_{n-1},\quad f(b)=y_n,$$

для площадей трапеций по порядку будем иметь значения:

$$\frac{h}{2n}(y_0+y_1),\quad \frac{h}{2n}(y_1+y_2),\ \ldots,\quad \frac{h}{2n}(y_{n-1}+y_n).$$

Черт. 69.

Складывая, придем к приближенной формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{h}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_n\right]. \tag{3}$$

Это и есть так называемая *формула трапеций*.

Можно показать, что при возрастании n до бесконечности погрешность формулы трапеций безгранично убывает. Таким образом, при достаточно большом n эта формула воспроизводит искомое значение интеграла с произвольной степенью точности.

Для примера возьмем известный нам интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0{,}785398\ldots$$

и примеиим к нему выведенную приближенную формулу, беря $n = 10$ и вычисляя на четыре знака.

По формуле трапеций нмеем

$x_0 = 0{,}0 \qquad y_0 = 1{,}0000$

$x_{10} = 1{,}0 \qquad y_{10} = 0{,}5000$

Сумма 1,5000

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2} + 7{,}0998\right) = 0{,}78498$$

$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}9901$
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}9615$
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}9174$
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}8621$
$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 0{,}8000$
$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 0{,}7353$
$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 0{,}6711$
$x_8 = 0{,}8$	$y_8 = 0{,}6098$
$x_9 = 0{,}9$	$y_9 = 0{,}5525$
	Сумма 7,0998

Полученный прнблнженный результат разннтся от истнниого значення меньше, чем на 0,0005.

Чнтатель, конечно, дает себе отчет в том, что погрешность мы смогли оценить здесь лишь потому, что наперед зиали точное значенне интеграла. Для того чтобы наша формула была действительио прнгодна для прнблнжеиных вычисленнй, нужно нметь удобное выражение для погрешности, которое позволяло бы не только оцеиивать погрешиость прн данном n, но и выбирать n, обеспечивающее требуемую степень точности. К этому вопросу мы вернемся в п° **191**.

190. Параболическая формула. Вернемся к криволинейной фигуре $ABCD$ и, разделив ее основание AB пополам в точке E, проведем соответствующую ей ординату EF (черт. 70). Ординаты

$$AD = y_0,$$

$$EF = y_{1/2},$$

$$BC = y_1$$

и основание $AB = h$ предполагаем известными. Вместо хорд CF и FD заменим на этот раз кривую CD приближенно дугой параболы (с вертикальной осью!), проходящей через три точки C, F, D — в расчете на то, что парабола лучше воспроизведет данную кривую, чем ломаная CFD.

Черт. 70.

Конечно, прежде всего нужно удостовериться, что через произвольные три точки плоскости

$$(x_0, y_0), \quad (x_{1/2}, y_{1/2}), \quad (x_1, y_1) \qquad (x_0 < x_{1/2} < x_1)$$

действительно всегда может быть проведена такая парабола, и притом только одна. Уравнение параболы с вертикальной осью имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c,$$

и его коэффициенты однозначно определяются из трех условий:

$$ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \quad ax_{1/2}^2 + bx_{1/2} + c = y_{1/2},$$
$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1,$$

ибо определитель системы

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_{1/2}^2 & x_{1/2} & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

(«определитель Вандермонда») отличен от нуля *).

Теперь займемся вычислением площади P фигуры, ограниченной сверху именно дугой параболы. Как мы покажем, эта площадь выразится формулой

$$P = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{1/2} + y_1); \tag{4}$$

ее обычно связывают с именем Симпсона **).

Не умаляя общности, можно считать, что ось y проходит через точку A. Тогда

$$P = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

Если учесть, что

$$y_0 = c, \quad y_{1/2} = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c, \quad y_1 = ah^2 + bh + c,$$

то формула Симпсона проверяется непосредственно.

Выражение (4), дающее **точное** значение площади под параболой, воспроизводит искомую площадь под кривой $y = f(x)$ лишь **приближенно**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{1/2} + y_1). \tag{5}$$

---

*) При $a = 0$ парабола вырождается в прямую.

**) Томас Симпсон (1710—1761) — английский математик. Повидимому, формула была известна еще до него.

Для повышения точности поступим так же, как и выше: разделим промежуток $[a, b]$ сначала на n равных частей (1), а рассматриваемую фигуру — на n полосок, к каждой из которых в отдельности применим формулу типа (5). Так как эта формула использует, кроме крайних, еще и среднюю ординату, то нам придется каждый из n частичных промежутков (1) разделить с помощью точек $x_{1/2}$, $x_{3/2}$, ..., $x_{n-1/2}$ еще пополам (так что в общей сложности основной промежуток окажется разложенным на $2n$ частей). Так как основания всех n (а не $2n$!) полосок равны $\frac{h}{n}$, то для площадей их получим, соответственно, приближенные выражения

$$\frac{h}{6n}(y_0+4y_{1/2}+y_1),$$

$$\frac{h}{6n}(y_1+4y_{3/2}+y_2), \ldots, \frac{h}{6n}(y_{n-1}+4y_{n-1/2}+y_n).$$

Складывая их, придем к новой приближенной формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{h}{6n}[(y_0+y_n)+2(y_1+\ldots+y_{n-1})+$$
$$+4(y_{1/2}+\ldots+y_{n-1/2}), \tag{6}$$

которая называется *параболической формулой* или *формулой Симпсона*; этой формулой пользуются для приближенного вычисления интегралов чаще, чем формулой трапеций, ибо она — при той же затрате труда — дает обычно более точный результат.

Для сравнения вычислим снова интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле Симпсона. Мы возьмем $2n=4$, так что число использованных ординат на этот раз будет даже меньшим, чем раньше. Имеем (вычисляя на пять знаков):

$$x_0=0 \quad x_{1/2}=\frac{1}{4} \qquad x_1=\frac{1}{2} \quad x_{3/2}=\frac{3}{4} \quad x_2=1$$

$$y_0=1 \quad 4y_{1/2}=3{,}76471 \quad 2y_1=1{,}6 \quad 4y_{3/2}=2{,}56 \quad y_2=0{,}5$$

$$\frac{1}{12}(1+3{,}76471+1{,}6+2{,}56+0{,}5)=0{,}78539\ldots$$

— все пять знаков верны!

Конечно, по отношению к формуле (5) могут быть повторены замечания, сделанные в конце предыдущего номера. К оценке погрешности приближенных формул мы сейчас и переходим.

191. Дополнительные члены приближенных формул. Рассмотрим сначала простейший частный случай формулы трапеций, отвечающий предположению $n=1$, т. е. формулу (1). Восстанавливая точность этой формулы

с помощью некоего «дополнительного члена» ρ, можем написать:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\rho,$$

и задача состоит в нахождении выражения ρ, удобного для оценки.

Предположим, что функция $f(x)$ имеет в промежутке $[a, b]$ непрерывные производные первых двух порядков. Тогда следующие элементарные преобразования интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, сводящиеся к трижды повторенному интегрированию по частям, непосредственно приводят к искомому выражению для ρ.

Имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d(x-a) = f(b)(b-a) - \int_a^b f'(x)(x-a)\,dx,$$

$$\int_a^b f'(x)(x-a)\,dx = \int_a^b f'(x)(x-a)\,d(x-b) = -\int_a^b (x-b)\,d[f'(x)(x-a)] =$$

$$= -\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx - \int_a^b f'(x)(x-b)\,dx,$$

$$\int_a^b f'(x)(x-b)\,dx = \int_a^b (x-b)\,df(x) = f(a)(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Сопоставляя всё это, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)[f(a)+f(b)] - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx,$$

так что

$$\rho = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx.$$

Так как функция $f''(x)$ непрерывна, а множитель $(x-a)(x-b)$ не меняет знака в промежутке $[a, b]$, то — по обобщенной теореме о среднем [п° 182, 10°]

$$\rho = \frac{1}{2} f''(\bar{\xi}) \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\bar{\xi}),$$

где $a \leqslant \bar{\xi} \leqslant b$ *).

---

*) Этот простой вывод выражения для дополнительного члена формулы (1) принадлежит студенту Г. Цейтину.

Если промежуток $[a, b]$ разделен на $n > 1$ равных частей, то для каждого частичного промежутка $[x_i, x_{i+1}]$ — по доказанному — будем иметь точную формулу

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_i+y_{i+1}}{2} - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i) \qquad (x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}).$$

Сложив эти равенства (при $i = 0, 1, \ldots, n-1$) почленно, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_n\right) + R_n,$$

$$(h = b - a)$$

где выражение

$$R_n = -\frac{h^3}{12n^2}\cdot\frac{f''(\xi_0) + f''(\xi_1) + \ldots + f''(\xi_{n-1})}{n}$$

и есть дополнительный член формулы трапеций (3).

Обозначим через m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $f''(x)$ в промежутке $[a, b]$ [n° **73**]; тогда и среднее арифметическое

$$\frac{f''(\xi_0) + f''(\xi_1) + \ldots + f''(\xi_{n-1})}{n}$$

также будет содержаться между m и M. По известному свойству непрерывной функции [n° **70**] найдется в $[a, b]$ такая точка, ξ, что упомянутое выражение в точности равняется $f''(\xi)$. Поэтому окончательно имеем

$$R_n = -\frac{h^3}{12n^2} f''(\xi) \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{7}$$

При возрастании n этот дополнительный член убывает, примерно, как $\frac{1}{n^2}$ *).

Вернемся, для примера, к вычислению интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, произведенному в n° **189**. Для подинтегральной функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ имеем $f''(x) = 2\,\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$; эта производная в промежутке $[0, 1]$ меняет знак, но по абсолютной величине остается меньшей двух. Отсюда, по формуле (7), $|R_{10}| < 0{,}0017$. Мы вычисляли ординаты на четыре знака с точностью до 0,00005; нетрудно видеть, что погрешность от округления ординат может быть включена в приведенную выше оценку. Истинная погрешность, действительно, меньше этой границы.

По отношению к формуле Симпсона (6) мы ограничимся тем, что приведем ее дополнительный член без вывода. В предположении существования

*) Мы говорим: примерно, ибо и ξ может изменяться с изменением n. Это следует помнить и впредь.

для функции $f(x)$ четырех непрерывных производных, этот дополнительный член (если промежуток разделен на $2n$ частей) имеет такой вид:

$$R_{2n} = -\frac{h^5}{180 \cdot (2n)^4} f^{(4)}(\eta) \qquad (a \leqslant \eta \leqslant b). \tag{8}$$

Обратимся снова к интегралу $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Для того чтобы избежать вычисления четвертой производной, фигурирующей в формуле (8), мы заметим, что функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ сама является производной от $y = \operatorname{arctg} x$, так что мы можем воспользоваться готовой формулой из n°96, 5). В согласии с ней

$$f^{(4)}(x) = y^{(5)} = 24 \cos^5 y \sin 5\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$, так что по формуле (7) $|R_4| < \frac{1}{1920} < 0{,}0006$. Истинная погрешность, как мы видели, значительно меньше этой границы.

192. Пример. В заключение, чтобы дать пример приближенного вычисления определенного интеграла, значение которого нам наперед неизвестно, поставим себе задачей вычислить полный эллиптический интеграл второго рода *)

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$$

с точностью до 0,001 по формуле Симпсона.

Для функции $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}$, при изменении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$, имеем $|f^{(4)}(x)| < 12$ **), поэтому [см. (7)]

$$|R_{2n}| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot 12 < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n)^4}, \text{ так как } \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10.$$

*) Полными называют интегралы $F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ Лежандра при $\varphi = \frac{\pi}{2}$: в этом случае в их обозначении мы будем опускать второй аргумент и писать просто $F(k)$, $E(k)$. Для полных интегралов существуют особые таблицы.

**) Очевидно, $y = f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$; дифференцируя тождество

$$y^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x,$$

легко последовательно получить оценки сверху абсолютных величин производных y', y'', y''', y''''.

Возьмем $2n = 6$, так что $|R_6| < 0{,}00052$. Тогда

$x_0 = 0 \quad (0^\circ)$	$y_0 = 1{,}0000$	
$x_{1/2} = \frac{\pi}{12}\,(15^\circ)$	$4y_{1/2} = \sqrt{12 + \sqrt{12}} = 3{,}9324$	
$x_1 = \frac{\pi}{6}\,(30^\circ)$	$2y_1 = \sqrt{14}/2 = 1{,}8708$	
$x_{3/2} = \frac{\pi}{4}\,(45^\circ)$	$4y_{3/2} = \sqrt{12} = 3{,}4641$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{15{,}4771}{18} = 1{,}35063\ldots$
$x_2 = \frac{\pi}{3}\,(60^\circ)$	$2y_2 = \sqrt{10}/2 = 1{,}5811$	
$x_{5/2} = \frac{5\pi}{12}\,(75^\circ)$	$4y_{5/2} = \sqrt{12 - \sqrt{12}} = 2{,}9216$	
$x_6 = \frac{\pi}{2}\,(90^\circ)$	$y_3 = \sqrt{2}/2 = 0{,}7071$	
	Сумма 15,4771	

К полученному результату, кроме поправки R_6, следует добавить еще (неотрицательную) поправку на округление, которая не превосходит $\frac{0{,}0003 \cdot \pi}{36} < 0{,}00003$.

Таким образом,

$$1{,}35011 < E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}35118,$$

и можно утверждать, что $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}351 \pm 0{,}001$.

(На деле в полученном результате в с е знаки верны!)

Этот пример интересен в том отношении, что соответствующая первообразная функция в конечном виде не выражается, так что ею воспользоваться для вычисления определенного интеграла было бы невозможно.

Наоборот, если в этом и аналогичных случаях первообразные представить в виде определенных интегралов с переменным верхним пределом, то можно было бы вычислить значения этих интегралов, отвечающих ряду значений верхнего предела. Этим, с принципиальной стороны, выясняется возможность составления для функций, заданных лишь их интегральными выражениями, таких же таблиц, какие известны читателю для элементарных функций.

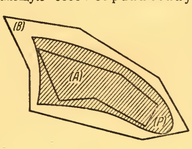
ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМЫ

193. Определение понятия площади. Квадрируемые области. Многоугольной областью, или — короче — многоугольником, мы будем называть произвольную конечную (возможно и несвязную) плоскую фигуру, ограниченную одной или несколькими замкнутыми ломаными. Для такой фигуры понятие площади было достаточно изучено в школьном курсе геометрии, его мы положим в основу.

Возьмем теперь произвольную фигуру (P) на плоскости, представляющую собой ограниченную замкнутую область. Ее границу или контур (K) мы всегда будем себе представлять в виде замкнутой кривой (или нескольких таких кривых).



Черт. 71.

Станем рассматривать всевозможные многоугольники (A), целиком содержащиеся в (P), и многоугольники (B), целиком содержащие в себе (P) (черт. 71). Если A и B означают, соответственно, их площади, то всегда $A \leqslant B$. Множество чисел $\{A\}$, ограниченное сверху любым B, имеет точную верхнюю границу P_* [n° 6], причем $P_* \leqslant B$. Точно так же множество чисел $\{B\}$, ограниченное снизу числом P_*, имеет точную нижнюю границу $P^* \geqslant P_*$. Эти границы можно было бы назвать — первую — внутренней, а вторую — внешней площадью фигуры (P).

Если обе границы

$$P_* = \sup \{A\} \quad и \quad P^* = \inf \{B\}$$

совпадают, то общее их значение P называется площадью фигуры (P). В этом случае фигуру (P) называют квадрируемой.

1°. *Для существования площади необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлись таких два многоугольника* (A) *и* (B), *что* $B - A < \varepsilon$.

Действительно, необходимость этого условия вытекает из основных свойств точных границ [п° 6]: если площадь P существует, то найдется $A > P - \frac{\varepsilon}{2}$ и $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$. Достаточность сразу же следует из неравенств

$$A \leqslant P_* \leqslant P^* \leqslant B.$$

Та же мысль может быть выражена и иначе: существенную роль в вопросе о квадрируемости области (P) играет кривая (K), служащая ее контуром.

Если квадрируемость налицо, то, как мы только что видели, по заданному $\varepsilon > 0$ кривая (K) может быть заключена в некоторую многоугольную область $(B - A)$, содержащуюся между контурами обоих многоугольников (A) и (B) (см. черт. 71) и имеющую площадь $B - A < \varepsilon$.

Допустим теперь, обратно, что контур (K) может быть заключен в многоугольную область (C) с площадью $C < \varepsilon$, где ε — любое наперед заданное положительное число. При этом, без умаления общности, можно предположить, что (C) не покрывает всей фигуры P. Тогда из точек области (P), не попадающих внутрь (C), составится многоугольная область (A), содержащаяся в (P); если же к (A) присоединить (C), то получится многоугольная область (B), уже содержащая в себе (P). Так как разность $B - A = C < \varepsilon$, то — в силу 1° — отсюда следует квадрируемость области (P).

Для облегчения речи условимся говорить, что (замкнутая или незамкнутая) кривая (K) имеет площадь, равную нулю, если ее можно покрыть многоугольной областью с произвольно малой площадью. Тогда приведенное выше рассуждение позволяет сформулировать условие квадрируемости в новой форме:

2°. *Для того чтобы фигура* (P) *была квадрируема, необходимо и достаточно, чтобы ее контур* (K) *имел площадь, равную нулю.*

В связи с этим приобретает важность выделение широких классов кривых с нулевой площадью.

Легко показать, что этим свойством обладает любая непрерывная кривая, выражаемая явным уравнением вида

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad x = g(y) \qquad (1)$$
$$(a \leqslant x \leqslant b) \qquad (c \leqslant y \leqslant d)$$

(f и g — непрерывные функции).

Пусть, например, мы имеем дело с первым из этих уравнений. По заданному $\varepsilon > 0$ можно промежуток $[a, b]$ разложить на части $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ так, чтобы в каждой из них колебание ω_i функции f было $< \frac{\varepsilon}{b-a}$ [п° 75]. Если обозначить, как обычно,

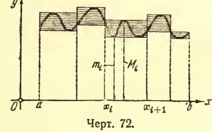
через m_i и M_i наименьшее и наибольшее значения функции f в i-м промежутке, то вся наша кривая покроется фигурой, составленной из прямоугольников

$$[x_i,\ x_{i+1};\ m_i,\ M_i] \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

(черт. 72) с общей площадью

$$\sum_i (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \Delta x_i = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Значит, кривая (1) имеет нулевую площадь. Отсюда следует:

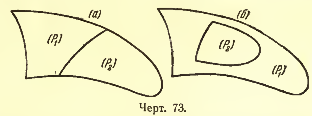


Черт. 72.

3°. *Если фигура* (P) *ограничена несколькими непрерывными кривыми, каждая из которых порознь выражается явным уравнением* (1) (*того или другого типа*), *то эта фигура квадрируема.*

Действительно, поскольку каждая из упомянутых кривых имеет нулевую площадь, то и весь контур, очевидно, также будет иметь площадь, равную нулю.

194. Аддитивность площади. Представим себе, что фигура (P) разложена на две фигуры (P_1) и (P_2)*): это можно осуществить, например, с помощью кривой, соединяющей две точки ее контура или целиком лежащей внутри (P) (черт. 73*а* и *б*). Тогда имеет место теорема:



Черт. 73.

4°. *Квадрируемость двух из этих трех фигур* (P), (P_1), (P_2) *влечет за собой квадрируемость третьей, причем всегда*

$$P = P_1 + P_2, \tag{2}$$

т. е. площадь обладает свойством аддитивности.

Утверждение относительно квадрируемости сразу вытекает из условия 2°. Остается лишь доказать равенство (2). Рассмотрим соответ-

*) Они могут иметь частично общую границу, но не налегают одна на другую, т. е. не имеют общих внутренних точек.

ствующие фигурам (P_1) и (P_2) входящие и выходящие многоугольники (A_1), (B_1) и (A_2), (B_2). Из взаимно неналегающих многоугольников (A_1), (A_2) составится многоугольная область (A) с площадью $A = A_1 + A_2$, целиком содержащаяся в области (P). Из многоугольников же (B_1) и (B_2), возможно — и взаимно налегающих, составится область (B) с площадью $B \leqslant B_1 + B_2$, содержащая в себе область (P).

Имеем одновременно

$$A_1 + A_2 \leqslant P \leqslant B \leqslant B_1 + B_2$$

и

$$A_1 + A_2 \leqslant P_1 + P_2 \leqslant B_1 + B_2,$$

так что числа P и $P_1 + P_2$ содержатся между одними и теми же и притом произвольно близкими границами $A_1 + A_2$ и $B_1 + B_2$, следовательно, эти числа равны, что и требовалось доказать.

Отметим, в частности, что отсюда $P_1 < P$, так что *часть фигуры имеет площадь, меньшую, чем вся фигура.*

195. Площадь как предел. Условие квадрируемости 1°, сформулированное в предыдущем номере, может быть перефразировано так:

5°. *Для того чтобы фигура (P) была квадрируема, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности многоугольников $\{(A_n)\}$ и $\{(B_n)\}$, соответственно, содержащихся в (P) и содержащих (P), площади которых имели бы общий предел*

$$\lim A_n = \lim B_n = P. \tag{3}$$

Этот предел, очевидно, и будет площадью фигуры (P).

Иногда вместо многоугольников выгоднее использовать другие фигуры, квадрируемость которых уже установлена:

6°. *Если для фигуры (P) можно построить такие две последовательности квадрируемых фигур $\{(Q_n)\}$ и $\{(R_n)\}$, соответственно, содержащихся в (P) и содержащих (P), площади которых имеют общий предел*

$$\lim Q_n = \lim R_n = P,$$

то фигура (P) также квадрируема, причем упомянутый предел и будет ее площадью.

Это сразу вытекает из предыдущего утверждения, если заменить каждую фигуру (Q_n) содержащимся в ней многоугольником (A_n), а фигуру (R_n) — содержащим ее многоугольником (B_n), настолько близкими к ним по площади, чтобы одновременно выполнялось и (3).

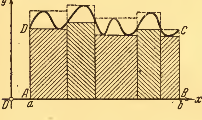
196. Выражение площади интегралом. Обратимся теперь к вычислению площадей плоских фигур при помощи интегралов.

На первом месте рассмотрим, *впервые — в строгом изложении*, уже встречавшуюся нам задачу об определении площади криво-

линейной трапеции $ABCD$ (черт. 74). Эта фигура ограничена сверху кривой DC, имеющей уравнение

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — положительная и непрерывная в промежутке $[a, b]$ функция; снизу она ограничена отрезком AB оси x, а с боков — двумя ординатами AD и BC (каждая из которых может свестись к точке).



Черт. 74.

Собственно, существование площади P рассматриваемой фигуры $ABCD$ следует из 3°, и речь идет лишь об ее вычислении.

С этой целью разобьем промежуток $[a, b]$, как обычно, на части, вставив между a и b ряд точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$$
$$\ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Обозначив через m_i и M_i, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в i-м промежутке ($i = 0, 1, \ldots, n-1$), составим суммы (Дарбу)

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

Они, очевидно, представляют собой площади ступенчатых фигур, составленных, соответственно, из входящих и выходящих прямоугольников (см. чертеж). Поэтому

$$s < P < S.$$

Но при стремлении к нулю наибольшей из разностей Δx_i обе суммы имеют своим пределом интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *), следовательно, ему и равна искомая площадь

$$P = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Если криволинейная трапеция $CDFE$ ограничена и снизу и сверху кривыми (черт. 75), уравнения которых

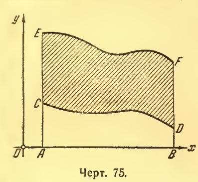
$$y_1 = f_1(x) \quad \text{и} \quad y_2 = f_2(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

*) В силу 5° это само по себе доказывает квадрируемость криволинейной трапеции $ABCD$; чтобы получить упоминавшиеся там последовательности фигур, можно было бы, например, делить промежуток на n равных частей, увеличивая n до бесконечности.

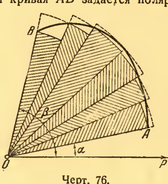
то, рассматривая ее как разность двух фигур $ABFE$ и $ABDC$, получим площадь названной трапеции [см. 4°] в виде

$$P=\int_a^b (y_2-y_1)\,dx=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \tag{5}$$

Пусть теперь дан с е к т о р AOB (черт. 76), ограниченный кривой AB и двумя радиусами-векторами OA и OB (каждый из которых может свестись к точке). При этом кривая AB задается поляр-



Черт. 75.



Черт. 76.

ным уравнением $r=g(\theta)$, где $g(\theta)$ — положительная непрерывная в промежутке $[\alpha, \beta]$ функция.

Вставив между α и β (см. чертеж) значения

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_i<\theta_{i+1}<\ldots<\theta_n=\beta,$$

проведем соответствующие этим углам радиусы-векторы. Если ввести и здесь наименьшее и наибольшее из значений функции $g(\theta)$ в $[\theta_i, \theta_{i+1}]$: μ_i и M_i, то круговые секторы, описанные этими радиусами, будут, соответственно, входящими и выходящими для фигуры (P). Составим отдельно из входящих секторов и из выходящих секторов две фигуры, площади которых будут

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_i \mu_i^2\,\Delta\theta_i \quad \text{и} \quad \Sigma=\frac{1}{2}\sum_i M_i^2\,\Delta\theta_i.$$

В этих суммах σ и Σ легко узнать суммы Дарбу для интеграла $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\,d\theta$; при стремлении к нулю наибольшей из разностей $\Delta\theta_i$ обе они имеют пределом этот интеграл. Тогда в силу 6° *)

*) Чтобы получить упоминавшиеся в 6° п о с л е д о в а т е л ь н о с т и фигур, и здесь можно было бы делить промежуток на n равных частей.

фигура (P) квадрируема и

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2\,d\theta. \tag{6}$$

Примеры. 1) Даны эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и точка $M(x, y)$ на нем (черт. 77). Определить площадь криволинейной трапеции $BOKM$ и сектора OMB.

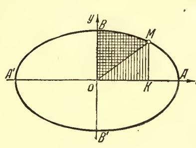
Из уравнения эллипса имеем $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, так что по формуле (4)

$$P_1 = \text{пл.}\,BOKM = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}\,x\sqrt{a^2-x^2} = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{xy}{2}.$$

Так как последнее слагаемое представляет площадь $\triangle OKM$, то, отнимая ее, для площади сектора получим выражение

$$P_2 = \text{пл.}\,OMB = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$



Черт. 77.

Черт. 78.

При $x=a$ для площади четверти эллипса найдем значение $\frac{\pi ab}{4}$, так что площадь всего эллипса $P=\pi ab$. Для круга $a=b=r$ и получается известная формула $P=\pi r^2$.

2) Определить площадь фигуры, заключенной между двумя конгруентными параболами $y^2=2px$ и $x^2=2py$ (черт. 78).

Очевидно, нужно воспользоваться формулой (5), полагая там

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \quad y_2 = \sqrt{2px}.$$

Для установления промежутка интегрирования решим совместно данные уравнения и найдем абсциссу точки M пересечения обеих парабол, отличной от начала; она равна $2p$. Имеем:

$$P = \int_0^{2p}\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2.$$

3) Формула (4) может быть использована и в том случае, если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически или уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t).$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

Произведя замену переменной в интеграле (4), получим (в предположении, что $x=a$ при $t=t_0$ и $x=b$ при $t=T$):

$$P=\int_{t_0}^{T} yx'_t\,dt=\int_{t_0}^{T}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{7}$$

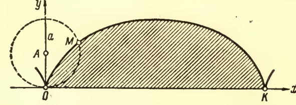
Если, например, при вычислении площади эллипса исходить из его параметрического представления

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t$$

и учесть, что x возрастает от $-a$ до a, когда t убывает от π до нуля, то найдем

$$P=2\int_{\pi}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt=\pi ab.$$

Мы вычислили здесь площадь верхней половины эллипса и удвоили ее.



Черт. 79.

4) Аналогично вычисляется площадь фигуры, ограниченной циклоидой $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (черт. 79). Имеем по формуле (7)

$$P=\int_{0}^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

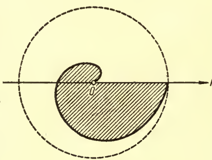
Таким образом, искомая площадь оказалась равна утроенной площади круга радиуса a.

5) Найти площадь одного витка архимедовой спирали $r=a\theta$ (черт. 80).

Имеем по формуле (6)

$$P=\frac{1}{2}a^2\int_{0}^{2\pi}\theta^2\,d\theta=\frac{a^2}{6}\theta^2\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2,$$

в то время как площадь круга радиуса $2\pi a$ будет $4\pi^3a^2$. Площадь витка спирали равна трети площади круга (этот результат был известен еще Архимеду).



Черт. 80.

197. Определение понятия объема, его свойства. Наподобие того, как в n° 193, исходя из понятия площади многоугольника, мы

установили понятие площади для произвольной плоской фигуры, сейчас дадим определение объема тела, опираясь на объем многогранника.

Итак, пусть дано произвольной формы тело (V), т. е. ограниченная замкнутая область в трехмерном пространстве. Границей (S) тела пусть служит замкнутая поверхность (или несколько таких поверхностей).

Мы будем рассматривать многогранники (X) объема X, целиком содержащиеся в нашем теле, и многогранники (Y) объема Y, содержащие в себе это тело. Существуют всегда точная верхняя граница V_* для X и точная нижняя граница V^* для Y, причем $V_* \leqslant V^*$; их можно было бы назвать, соответственно, внутренним и внешним объемами тела.

Если обе величины

$$V_* = \sup\{X\} \quad \text{и} \quad V^* = \inf\{Y\}$$

совпадают, то их общее значение V называется объемом тела (V). В этом случае тело (V) иногда называют кубируемым.

И здесь легко доказать теорему:

1°. *Для существования объема необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись таких два многогранника (X) и (Y), для которых $Y - X < \varepsilon$.*

Можно ее представить в другой форме:

2°. *Для того чтобы тело (V) имело объем, необходимо и достаточно, чтобы ограничивающая его поверхность (S) имела нулевой объем,* т. е. чтобы ее можно было заключить в многогранное тело с произвольно малым объемом.

К числу поверхностей с нулевым объемом, прежде всего, принадлежат поверхности, выражаемые явным уравнением одного из трех типов

$$z = f(x, y), \quad y = g(z, x), \quad x = h(y, z),$$

где f, g, h — непрерывные функции от двух аргументов в некоторых ограниченных областях.

Пусть, скажем, дано уравнение первого типа в области (P), которая содержится в прямоугольнике (R). По теореме n° **137**, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно разложить этот прямоугольник на столь малые прямоугольники (R_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, чтобы колебание функции f в той части (P_i) области (P), которая содержится в (R_i), было $< \frac{\varepsilon}{R}$. Если m_i и M_i — наименьшее и наибольшее из значений функции f в (P_i), то вся наша поверхность может быть заключена в многогранник, составленный из прямоугольных параллелепипедов с пло-

щадями оснований R_i и высотами $\omega_i = M_i - m_i$. Объем этого многогранника будет

$$\sum_i \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum_i R_i = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Поэтому:

3°. *Если тело (V) ограничено несколькими непрерывными поверхностями, каждая из которых порознь выражается явным уравнением (одного из трех типов), то это тело имеет объем.*

Подобно площади, и объем обладает свойством аддитивности:

4°. *Если тело (V) разложено на два тела (V_1) и (V_2), то из существования объема для двух из этих трех тел вытекает существование объема для третьего. При этом*

$$V = V_1 + V_2.$$

Легко перефразировать для объемов и те предложения 5°, 6°, которые в n° **195** были доказаны для площадей:

5°. *Для того чтобы тело (V) имело объем, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности, соответственно, входящих и выходящих многогранников $\{(X_n)\}$ и $\{(Y_n)\}$, объемы которых имели бы общий предел*

$$\lim X_n = \lim Y_n = V.$$

Этот предел и будет объемом тела (V).

Полезно отметить и такое предложение, где вместо многогранников фигурируют произвольные тела, заведомо имеющие объемы.

6°. *Если для тела (V) можно построить такие две последовательности, соответственно, входящих и выходящих тел $\{(T_n)\}$ и $\{(U_n)\}$, которые имеют объемы, причем эти объемы стремятся к общему пределу*

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

то и тело (V) имеет объем, равный упомянутому пределу.

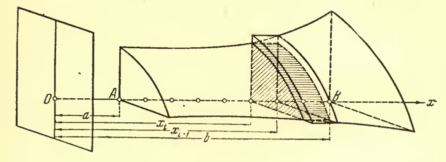
198. Выражение объема интегралом. Начнем с почти очевидного замечания: *прямой цилиндр высоты H, основанием которого служит квадрируемая плоская фигура (P), имеет объем, равный произведению площади основания на высоту*: $V = PH$.

Возьмем многоугольники (A_n) и (B_n), соответственно содержащиеся в (P) и содержащие в себе (P), так, чтобы их площади A_n и B_n стремились к P [n° **195**, 5°]. Если на этих многоугольниках построить прямые призмы (X_n) и (Y_n) высоты H, то их объемы

$$X_n = A_n H \quad \text{и} \quad Y_n = B_n H$$

будут стремиться к общему пределу $V = PH$, который (в силу n° **197**, 5°) и будет объемом нашего цилиндра.

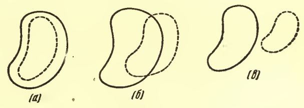
Рассмотрим теперь некоторое тело (V), содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и станем рассекать его плоскостями, перпендикулярными к оси x (черт. 81). Допустим, что все эти сече-



Черт. 81.

ния **квадрируемы**, и пусть площадь сечения, отвечающего абсциссе x, — обозначим ее через $P(x)$ — будет непрерывной функцией от x (для $a \leqslant x \leqslant b$).

Если спроектировать без искажения два подобных сечения на какую-либо плоскость, перпендикулярную к оси x, то они могут



Черт. 82.

либо содержаться одно в другом (как на черт. 82*а*), либо частично одно на другое налегать, или лежать одно вне другого (черт. 82*б* и *в*).

Мы остановимся на том случае, когда два различных сечения, будучи спроектированы на плоскость, перпендикулярную к оси x, оказываются всегда содержащимися одно в другом.

В этом предположении можно утверждать, что тело имеет объем, который выражается формулой

$$V = \int_a^b P(x)\,dx. \tag{8}$$

Для доказательства разобьем отрезок $[a, b]$ на оси x точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

на части и разложим плоскостями $x = x_i$, проведенными через точки деления, все тело на слои. Рассмотрим i-й слой, содержащийся между плоскостями $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. В промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $P(x)$ имеет наибольшее значение M_i и наименьшее значение m_i; если сечения, отвечающие различным значениям x в этом промежутке, поместить на одну плоскость, скажем, $x = x_i$, то все они при сделанном предположении будут содержаться в наибольшем, имеющем площадь M_i, и содержать в себе наименьшее, с площадью m_i. Если на этих, наибольшем и наименьшем, сечениях построить прямые цилиндры высоты $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, то бо́льший из них будет содержать в себе рассматриваемый слой нашего тела, а меньший сам будет содержаться в этом слое. На основании сделанного вначале замечания объемы этих цилиндров будут, соответственно, $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$.

Из входящих цилиндров составится тело (T), а из выходящих — тело (U); их объемы равны, соответственно,

$$\sum_i M_i \Delta x_i \quad \text{и} \quad \sum_i m_i \Delta x_i$$

и, когда стремится к нулю $\lambda = \max \Delta x_i$, имеют общий предел (8). В силу n° **197**, 6°, таков же будет и объем тела (V) *).

Важный частный случай, когда заведомо выполняется указанное выше предположение о взаимном расположении сечений, представляют тела вращения. Вообразим на плоскости xy кривую, заданную уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, где $f(x)$ непрерывна и неотрицательна; станем вращать ограниченную ею криволинейную трапецию вокруг оси x (черт. 83*а* и *б*). Полученное тело (V), очевидно, подходит под рассматриваемый случай, ибо сечения его проектируются на перпендикулярную к оси x плоскость в виде концентрических кругов. Здесь

$$P(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2,$$

так что

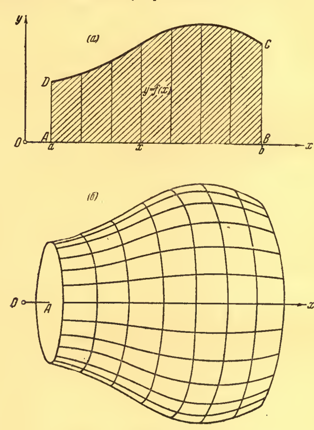
$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \tag{9}$$

Если криволинейная трапеция ограничена и снизу и сверху кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, то, очевидно,

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2] \, dx = \pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\} \, dx, \tag{10}$$

*) Деля, например, промежуток на равные части, легко выделить те последовательности входящих и выходящих тел, о которых говорится в цитированном предложении.

хотя предположение о сечениях здесь может и не выполняться. Вообще доказанный результат легко распространяется на все такие тела, которые получаются путем сложения или вычитания из тел, удовлетворяющих упомянутому предположению.



Черт. 83.

В общем случае можно утверждать лишь следующее: *если тело* (*V*) *имеет объем* *), *то он выражается формулой* (9).

Примеры. 1) Пусть эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вращается вокруг оси x. Так как

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

*) Так будет, например, если тело удовлетворяет условиям теоремы 3°.

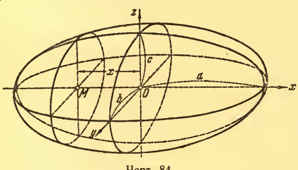
то для объема эллипсоида вращения найдем

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2\;*).$$

Аналогично для объема тела, полученного от вращения вокруг оси y, найдем выражение $\frac{4}{3}\pi a^2b$. Предполагая же в этих формулах $a=b=r$, мы получим для объема шара радиуса r известное значение $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2) То же — для ветви циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.



Черт. 84.

Параметрические уравнения кривой облегчают выполнение подстановки $x=a(t-\sin t)$, $dx=a(1-\cos t)\,dt$ в формуле

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\,dx.$$

Именно:

$$V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3.$$

3) Найти объем трехосного эллипсоида, заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(черт. 84).

---

*) Легко видеть, что $\int_{-a}^{0}=\int_0^a$ (подстановка $x=-t$).

Плоскость, перпендикулярная к оси x и проходящая через точку $M(x)$ на этой оси, пересечет эллипсоид по эллипсу; уравнение проекции его (без искажения) на плоскость yz будет таково:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1 \qquad (x=\text{const}).$$

Отсюда ясно, что полуоси его будут, соответственно,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

а площадь [n° 196, 1)] выразится так:

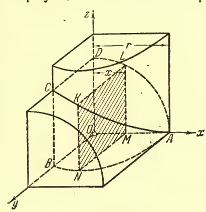
$$P(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

Таким образом, по формуле (8) искомый объем

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

4) Рассмотрим два круговых цилиндра радиуса r, оси которых пересекаются под прямым углом, и определим объем тела, ограниченного ими.

Тело $OABCD$, изображенное на черт. 85, составляет восьмую часть интересующего нас тела. Ось x проведем через точку O пересечения осей цилиндров перпендикулярно к обеим осям. Тогда в сечении тела $OABCD$ плоскостью, проведенной на расстоянии x от O, перпендикулярно к оси x, получится квадрат $KLMN$, сторона которого $MN=\sqrt{r^2-x^2}$, так что $P(x)=r^2-x^2$. Тогда по формуле (8)



Черт. 85.

$$V=8\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}r^3.$$

5) Решим в заключение ту же задачу, но в предположении, что цилиндры имеют различные радиусы: r и $R>r$.

Разница, по сравнению с прежним, будет лишь в том, что, вместо квадрата, в сечении рассматриваемого тела плоскостью на расстоянии x от O получится прямоугольник со сторонами $\sqrt{r^2-x^2}$ и $\sqrt{R^2-x^2}$. Таким образом, в этом случае объем V выразится уже *эллиптическим интегралом*

$$V=8\int_{0}^{r}\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}\,dx$$

или, если сделать подстановку $x = r\sin\varphi$ и положить $k = \frac{r}{R}$,

$$V = 8Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 8Rr^2 \cdot I.$$

Займемся сведением интеграла I к полным эллиптическим интегралам *) обоих видов. Прежде всего,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi - k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi = I_1 + I_2.$$

Но

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi = \frac{k^2 - 1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} +$$

$$+ \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) F(k) + \frac{1}{k^2} E(k).$$

С другой стороны, интегрируя по частям, имеем:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2\varphi) \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= E(k) - 2I.$$

Отсюда

$$I = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2} + 1\right) E(k) - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) F(k)\right].$$

Таким образом, окончательно

$$V = \frac{8R^3}{3}\left[(1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)\right].$$

---

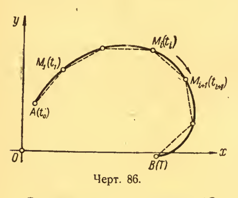
*) См. сноску на стр. 352.

§ 2. ДЛИНА ДУГИ

199. Определение понятия длины дуги. Рассмотрим на плоскости (поначалу — незамкнутую) кривую AB, заданную параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

где функции φ и ψ предполагаются непрерывными. Будем считать, что точка A отвечает значению $t = t_0$, а точка B — значению $t = T$. При этом пусть кратных точек на кривой нет, так что различным значениям параметра t отвечают и различные точки кривой.



Черт. 86.

Если считать точки кривой расположенными в порядке возрастания параметра t (т. е. из двух точек ту принимать за следующую, которая отвечает бо́льшему значению параметра), то этим на кривой создается определенное направление (черт. 86).

Возьмем теперь на кривой AB ряд точек

$$A = M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_i,\ M_{i+1},\ \ldots,\ M_m = B,$$

идущих одна за другой в указанном направлении; им отвечает ряд возрастающих значений параметра

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_m = T.$$

Впишем в кривую AB ломаную $(p) = AM_1M_2 \ldots B$ и обозначим через p ее периметр.

Конечный предел s для периметра p, при стремлении к нулю наибольшей из сторон M_iM_{i+1} ломаной (p), называется длиной дуги:

$$s = \breve{AB} = \lim p.$$

Если такой предел существует, то сама кривая называется спрямляемой.

Содержание этого определения может быть раскрыто так: *какую бы ни взять последовательность вписанных в кривую ломаных $\{(p_n)\}$, удовлетворяющую лишь тому условию, что наибольшая из сторон ломаной (p_n) при возрастании n стремится к нулю, периметр p_n всякий раз стремится к пределу s.*

Можно выразить его и «на языке ε-δ»: *для каждого* $\varepsilon > 0$ *должно найтись такое* $\delta > 0$, *что неравенство*

$$0 \leqslant s - p < \varepsilon$$

выполняется, лишь только все стороны вписанной ломаной

$$\overline{M_i M_{i+1}} < \delta.$$

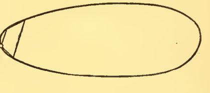
Равносильность обоих определений устанавливается, как обычно.

Важным свойством длины дуги является ее аддитивность: *Если на дуге* AB *взять еще точку* C, *то из спрямляемости дуги* AB *вытекает спрямляемость обеих дуг* AC *и* CB, *причем*

$$\breve{AB} = \breve{AC} + \breve{CB}.$$

Мы примем здесь это утверждение без доказательства: для тех кривых, которые мы обычно будем рассматривать [см. n°**201**], не только будет обеспечено существование длины дуги, но и аддитивность будет вытекать из самого выражения длины дуги интегралом.

Обратимся теперь к случаю замкнутой кривой, для которой точки A и B совпадают (но кратных точек все же нет, т. е. каждая отличная от $A \equiv B$ точка получается лишь при одном значении параметра t). Нетрудно видеть, что в этом случае приведенное выше определение длины дуги уже не может быть применено безоговорочно: ведь даже при соблюдении указанного условия ничто не мешало бы ломаной стягиваться в точку, а ее периметру стремиться к нулю (черт. 87). Суть дела в том, что при незамкнутой кривой одно убывание всех звеньев ломаной (p) до нуля уже обеспечивает все более тесное примыкание их к соответствующим частичным дугам; поэтому-то и естественно предел ее периметра p принять за длину всей дуги. В случае же замкнутой кривой дело обстоит уже не так *).



Черт. 87.

Можно было бы видоизменить это определение (неизбежно усложнив его) с тем, чтобы оно охватило и случай замкнутой кривой. Мы предпочтем — для простоты — другой путь, именно, представим себе замкнутую кривую, с помощью произвольно взятой на ней точки C разложенной на два незамкнутых куска, и сумму их длин (если они оба спрямляемы) назовем длиной всей кривой. Опираясь

*) Если вспомнить из курса элементарной геометрии определение длины окружности как предела периметра правильного вписанного многоугольника, то именно оговорка относительно правильности многоугольника как раз и предотвращает здесь указанную в тексте возможность!

на аддитивность длины дуги, легко показать, что сумма на деле не зависит от выбора точек A и C.

200. Леммы. Рассмотрим вновь незамкнутую кривую (1) без кратных точек. Докажем для нее следующих два вспомогательных утверждения:

Лемма 1. *Если точки M' и M'' отвечают значениям t' и t'' параметра $(t' < t'')$, то для любого $\delta > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при $t'' - t' < \eta$ длина хорды $\overline{M'M''} < \delta$.*

Действительно, ввиду равномерной непрерывности функций φ и ψ из (1), по $\delta > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при $|t'' - t'| < \eta$ будет одновременно

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

а тем самым — и

$$\overline{M'M''} = \sqrt{[\varphi(t'') - \varphi(t')]^2 + [\psi(t'') - \psi(t')]^2} < \delta.$$

Имеет место и

Лемма 2. *Для любого $\eta > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, лишь только длина хорды $\overline{M'M''} < \delta$, тотчас же разность $t'' - t'$ $(t' < t'')$ значений параметра, соответствующих ее концам, будет $< \eta$.*

Допустим противное; тогда для некоторого $\eta > 0$, при любом $\delta > 0$, найдутся такие две точки $M'(t')$ и $M''(t'')$, что $\overline{M'M''} < \delta$ и в то же время $t'' - t' \geqslant \eta$. Взяв последовательность $\{\delta_n\}$, сходящуюся к нулю, и полагая поочередно $\delta = \delta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, придем к двум последовательностям точек $\{M'_n(t'_n)\}$ и $\{M''_n(t''_n)\}$, для которых

$$\overline{M'_n M''_n} < \delta_n, \quad \text{но} \quad t''_n - t'_n \geqslant \eta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

По лемме Больцано — Вейерштрасса [n° 51], без умаления общности можно предположить, что при этом

$$t'_n \to t^*, \quad t''_n \to t^{**}$$

(этого легко добиться, переходя — в случае надобности — к частичным последовательностям). Очевидно,

$$t^{**} - t^* \geqslant \eta,$$

так что $t^* \neq t^{**}$. В то же время для соответствующих точек M^* и M^{**} имеем $\overline{M^*M^{**}} = 0$, т. е. эти точки должны совпасть, что невозможно, так как кривая не имеет кратных точек и незамкнута. Полученное противоречие завершает доказательство.

Эти две леммы показывают, что — при определении длины незамкнутой кривой — совершенно безразлично, исходить ли из требования, чтобы стремилась к нулю наибольшая из сторон $\overline{M_iM_{i+1}}$ вписанной ломаной [в согласии с n° 199], или из требования, чтобы стремилась к нулю наибольшая из разностей $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, так как оба требования вытекают одно из другого! Сейчас нам удобнее будет характеризовать предельный процесс именно последним требованием.

201. Выражение длины дуги интегралом. Предположим дополнительно, что функции φ и ψ, фигурирующие в уравнениях (1) незамкнутой кривой, имеют непрерывные производные φ' и ψ'. При этих условиях, как мы докажем, кривая спрямляема и длина дуги выражается формулой

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{2}$$

Мы будем исходить из разбиения промежутка $[t_0, T]$ точками

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = T$$

на части длины $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Этим значениям t отвечают вершины ломаной $AM_1 \ldots M_{n-1}B$, вписанной в дугу $\overset{\frown}{AB}$, и (как мы разъяснили выше) *длину ее s можно определить как предел периметра p ломаной при стремлении $\lambda^* = \max \Delta t_i$ к нулю.*

Положим

$$\varphi(t_i) = x_i, \ \psi(t_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

и

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \ \ (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Длина i-го звена $M_i M_{i+1}$ вписанной ломаной выразится так:

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

Применив к приращениям Δx_i и Δy_i функций (1) порознь формулу конечных приращений, получим:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i + \Delta t_i) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

$$\Delta y_i = \psi(t_i + \Delta t_i) - \psi(t_i) = \psi'(\tau_i^*)\,\Delta t_i,$$

причем о значениях τ_i и τ_i^* мы ничего не знаем, кроме того, что оба они содержатся между t_i и t_{i+1}. Имеем теперь

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i,$$

так что для периметра всей ломаной получается следующее выражение:

$$p = \sum_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i.$$

Если заменить во втором слагаемом под знаком корня везде τ_i^* на τ_i, то преобразованное выражение

$$\sigma = \sum_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i,$$

очевидно, представит собой и н т е г р а л ь н у ю сумму как раз для интеграла (2). При стремлении λ^* к нулю эта сумма и будет иметь своим пределом упомянутый интеграл*). Для того чтобы показать, что к тому же пределу стремится и периметр p ломаной, достаточно обнаружить, что разность $p - \sigma$ стремится к нулю.

С этой целью произведем оценку этой разности

$$|p - \sigma| \leqslant \sum_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \Delta t_i.$$

*) Существование его не вызывает сомнений, ибо подинтегральная функция непрерывна [n°179, I].

Элементарное неравенство

$$\left|\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right| \leqslant |b_1-b| \text{ *)},$$

если применить его к каждому слагаемому написанной выше суммы в отдельности, даст нам

$$|p-\sigma| \leqslant \sum_i |\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)|\,\Delta t_i.$$

Ввиду непрерывности функции $\psi'(t)$, по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|\psi'(t^*)-\psi'(t)| < \varepsilon$ лишь только $|t^*-t| < \delta$. Если взять все $\Delta t_i < \delta$, то и $|\tau_i^*-\tau_i| < \delta$, так что $|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)| < \varepsilon$ и

$$|p-\sigma| \leqslant \varepsilon \sum_i \Delta t_i = \varepsilon (T-t_0).$$

Это и доказывает наше утверждение.

Если кривая задана явным уравнением в прямоугольных координатах

$$y=f(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X),$$

то, принимая x за параметр, из формулы (2), как ее частный случай, получим

$$s=\int_{x_0}^{X} \sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_{x_0}^{X} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{2a}$$

Наконец, и случай полярного задания кривой

$$r=g(\theta) \qquad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \Theta)$$

также приводится к параметрическому с помощью обычных формул перехода

$$x=r\cos\theta=g(\theta)\cos\theta, \quad y=r\sin\theta=g(\theta)\sin\theta;$$

роль параметра здесь играет θ. Для этого случая

$$x_\theta'=r_\theta'\cos\theta-r\sin\theta, \quad y_\theta'=r_\theta'\sin\theta+r\cos\theta,$$

так что

$$x_\theta'^2+y_\theta'^2=r^2+r_\theta'^2 \tag{3}$$

и

$$s=\int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2+r_\theta'^2}\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{[g(\theta)]^2+[g'(\theta)]^2}\,d\theta. \tag{2б}$$

---

*) Неравенство это очевидно при $a=0$; если же $a \neq 0$, то оно непосредственно вытекает из тождества

$$\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b^2}=\frac{b_1+b}{\sqrt{a^2+b_1^2}+\sqrt{a^2+b^2}}(b_1-b),$$

так как множитель прн разности в скобках по абсолютной величине меньше едииицы.

Замечание. Формула (2) непосредственно распространяется и на случай замкнутой кривой. Возьмем в этом случае произвольное t' между t_0 и T, разложим данную замкнутую кривую (1) соответствующей точкой $M'(t')$ на две незамкнутые кривые AM' и $M'B$ и к каждой кривой в отдельности применим формулу типа (2):

$$s_1 = \breve{AM'} = \int_{t_0}^{t'}, \quad s_2 = \breve{M'B} = \int_{t'}^{T}.$$

Сложив эти результаты, для длины всей замкнутой кривой получим

$$s = s_1 + s_2 = \int_{t_0}^{T}.$$

Примеры. 1) Парабола: $y = \frac{x^2}{2p}$.

Приняв за начало отсчета дуг вершину $O\,(x=0)$, для произвольной точки M с абсциссой x имеем:

$$s = \breve{OM} = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{x^2+p^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)\right]_0^x =$$

$$= \frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}.$$

2) Циклоида: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.
Здесь (при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$)

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a\sin\frac{t}{2};$$

длина одной ветви циклоиды, по формуле (2), будет

$$S = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

3) Архимедова спираль: $r = a\theta$.
По формуле (2б), отсчитывая дугу от полюса O до любой точки M (отвечающей углу θ), получаем

$$s = \breve{OM} = a\int_0^{\theta}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right].$$

Любопытно, что, подставив здесь $\theta = \frac{r}{a}$, мы придем к выражению, формально сходному с выражением для длины дуги параболы [см. 1)].

4) Эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Удобнее, впрочем, взять уравнения эллипса в параметрической форме: $x=a\sin t$, $y=b\cos t$. Очевидно,

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}=$$
$$=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t},$$

где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ есть численный эксцентриситет эллипса.

Вычисляя длину дуги эллипса от верхнего конца малой оси до любой его точки в первом квадранте, получим

$$s=a\int_0^t \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt=a\cdot E(\varepsilon,\ t).$$

Таким образом, длина дуги эллипса выражается эллиптическим интегралом второго рода [n°174, см. также n°183]; как указывалось, этот факт послужил поводом для названия «эллиптический».

В частности, длина четверти обвода эллипса выражается через полный эллиптический интеграл *)

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt=a\cdot E(\varepsilon).$$

Длина же всего обвода будет

$$S=4a\cdot E(\varepsilon).$$

202. Переменная дуга, ее дифференциал. Возьмем на дуге AB точку M, отвечающую произвольному значению t параметра. Тогда длина дуги $\breve{AM}$, вместо (2), выразится формулой

$$s=s(t)=\breve{AM}=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt \tag{4}$$

и, очевидно, будет возрастающей и непрерывной функцией от t.

Больше того, ввиду непрерывности подинтегральной функции, эта переменная дуга $s=s(t)$ будет иметь по t производную, равную подинтегральной функции [n°183, 12°]:

$$s_t'=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}. \tag{5}$$

Если возвести это равенство в квадрат и умножить почленно на dt^2, то получим замечательную по простоте формулу

$$ds^2=dx^2+dy^2, \tag{6}$$

*) См. сноску на стр. 352.

которая к тому же обладает геометрической наглядностью. На черт. 88 в криволинейном прямоугольном треугольнике MNM_1 «катетами» служат приращения координат точки M: $MN = \Delta x$, $NM_1 = \Delta y$, а «гипотенузой» — дуга $\smile{MM_1} = \Delta s$, которая является приращением дуги $\smile{AM} = s$. Оказывается, что если не для самих приращений, то для их главных частей — дифференциалов — имеет место своеобразная «теорема Пифагора».

Полезно отметить частные случаи важной формулы (5), отвечающие различным частным типам задания кривой. Так, если кривая задана явным уравнением в декартовых координатах $y = f(x)$, то в роли параметра оказывается x, дуга зависит от x: $s = s(x)$, и формула (5) принимает вид

$$s'_x = \sqrt{1 + y'^2_x}. \qquad (5a)$$

Если же кривая задана полярным уравнением $r = g(\theta)$, и параметром будет θ, то дуга на этот раз будет функцией от θ: $s = s(\theta)$. Ввиду (3), формула (5) преобразуется так:

$$s'_\theta = \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}. \qquad (5б)$$

Черт. 88.

Часто представляется удобным взять в качестве начальной точки A для отсчета дуг не один из концов дуги, а какую-либо внутреннюю точку ее. В этом случае естественно дуги, откладываемые от нее в направлении возрастания параметра, считать положительными, а в другом — отрицательными и, соответственно этому, длину дуги в первом случае снабжать знаком плюс, а во втором — знаком минус. Вот эту величину дуги со знаком мы для краткости будем называть просто дугой. Формулы (4), (5), (5а), (5б) имеют место во всех случаях.

Так как переменная дуга $s = \smile{AM}$ является непрерывной монотонно возрастающей функцией от параметра t, то и последний, в свою очередь, может быть рассматриваем как однозначная и непрерывная функция от s: $t = \omega(s)$ [n°71]. Подставляя это выражение t в уравнения (1), мы получим текущие координаты x и y выраженными в функции от s:

$$x = \varphi(\omega(s)) = \Phi(s), \quad y = \psi(\omega(s)) = \Psi(s).$$

Несомненно, дуга $s = \smile{AM}$, играющая роль «криволинейной абсциссы» точки M, является самым естественным параметром для определения ее положения.

Предположим, что при данном значении t обе производные x'_t и y'_t одновременно в нуль не обращаются (геометрический смысл этого предположения будет выяснен в n° **210**), тогда

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} > 0,$$

и для соответствующего значения s существует производная [n°**80**]

$$t'_s = \omega'(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}},$$

а следовательно, и производные

$$x'_s = \Phi'(s), \quad y'_s = \Psi'(s).$$

203. Длина дуги пространственной кривой. По отношению к пространственной кривой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

— без кратных точек — определение длины дуги может быть дано в таком же виде, как и для плоской кривой [**199—201**]. Здесь также для длины дуги получается формула, аналогичная (2):

$$s = \breve{AB} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\, dt$$

и т. д. На этот случай переносится, почти без изменений, все сказанное относительно случая плоской кривой. Не задерживаясь на этом, приведем п р и м е р ы.

1) Винтовая линия: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ct$.
Так как здесь

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

то длина дуги кривой от точки A $(t = 0)$ до точки M (t — любое) будет

$$s = \breve{AM} = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\, dt = \sqrt{a^2 + c^2}\, t$$

— результат очевидный, если вспомнить, что при разворачивании цилиндрической поверхности винтовая линия на ней превратится в наклонную прямую.

2) Кривая: $x = R\sin^2 t,\ y = R\sin t\cos t,\ z = R\cos t$, где $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Имеем

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} = R\sqrt{1 + \sin^2 t}.$$

В таком случае длина всей кривой выразится полным эллиптическим интегралом второго рода

$$S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 t}\, dt = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\, dt = \sqrt{2}R\cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

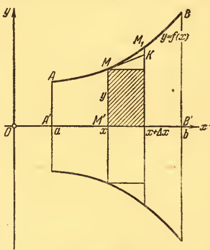
204. Схема применения определенного интеграла. Прежде чем перейти к применениям определённого интеграла в области механики, физики и техники, полезно наперед уяснить себе тот путь, по которому в прикладных вопросах обычно приходят к определенному интегралу. С этой целью мы набросаем общую схему применения интеграла, иллюстрируя ее примерами уже изученных геометрических задач.

Вообразим, что требуется определить некоторую постоянную величину Q (геометрическую или иную), связанную с промежутком $[a, b]$. При этом пусть каждому частичному промежутку $[\alpha, \beta]$, содержащемуся в $[a, b]$, отвечает некоторая часть величины Q так, что разложение промежутка $[a, b]$ на частичные промежутки влечет за собой разложение на соответствующие части и величины Q.

Точнее говоря, речь идет о некоторой «функции от промежутка» $Q([\alpha, \beta])$, обладающей свойством аддитивности, так что, если промежуток $[\alpha, \beta]$ состоит из частичных промежутков $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, то тогда и

$$Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta]).$$

Задача же состоит в вычислении ее значения, отвечающего всему промежутку $[a, b]$.



Черт. 89.

Для примера возьмем на плоскости кривую $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ (черт. 89). Тогда: 1) длина S кривой AB, 2) площадь P ограниченной ею криволинейной трапеции $AAB'B$ и 3) объем V тела, полученного от вращения этой трапеции вокруг оси x, — все три

являются величинами указанного типа. Нетрудно дать себе отчет в том, какие «функции от промежутка» ими порождаются.

Рассмотрим «элемент» ΔQ величины Q, отвечающий «элементарному промежутку» $[x, x+\Delta x]$. Исходя из условий вопроса, стараются найти для ΔQ приближенное выражение вида $q(x)\,\Delta x$, линейное относительно Δx, так, чтобы оно разнилось от ΔQ разве лишь на бесконечно малую порядка, высшего, чем Δx. Иными словами, *из бесконечно малого (при $\Delta x \to 0$) «элемента» ΔQ выделяют его главную часть.* Ясно, что тогда относительная погрешность приближенного равенства

$$\Delta Q \doteq q(x)\,\Delta x \tag{1}$$

будет стремиться к нулю вместе с Δx.

Так, в примере 1) элемент дуги $\overset{\smile}{MM_1}$ можно заменить отрезком касательной MK, так что из ΔS выделяется линейная часть

$$\sqrt{1+y_x'^2}\,\Delta x = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\Delta x.$$

В примере 2) естественно заменить элементарную полоску ΔP входящим прямоугольником с площадью

$$y\,\Delta x = f(x)\,\Delta x.$$

Наконец, в примере 3) из элементарного слоя ΔV выделяется его главная часть в виде входящего кругового цилиндра, с объемом

$$\pi y^2\,\Delta x = \pi\,[f(x)]^2\,\Delta x.$$

Во всех трех случаях нетрудно показать, что погрешность от такой замены будет бесконечно малой высшего порядка, чем Δx.

Лишь только это сделано, можно уже утверждать, что *искомая величина Q точно выражается интегралом*

$$Q = \int_a^b q(x)\,dx. \tag{2}$$

Для пояснения этого разложим промежуток $[a, b]$ точками x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ на элементарные промежутки

$$[a, x_1],\quad [x_1, x_2], \ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, b].$$

Так как каждому промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ или $[x_i, x_i+\Delta x_i]$ отвечает элементарная часть нашей величины, приближенно равная $q(x_i)\,\Delta x_i$, то вся искомая величина Q приближенно выразится суммой

$$Q \doteq \sum_i q(x_i)\,\Delta x_i.$$

Степень точности полученного значения будет тем выше, чем мельче частичные промежутки, так что Q, очевидно, будет пределом упомя-

нутой суммы, т. е. действительно выразится определенным интегралом $\int_a^b q(x)\,dx$.

Это в полной мере относится ко всем трем рассмотренным примерам. Если выше мы получили формулы для величин S, P, V несколько иначе, то это потому, что задача наша состояла не только в вычислении их, но и в доказательстве их существования — в согласии с ранее данными определениями.

Таким образом, все дело сводится к установлению приближенного равенства (1), которое обыкновенно пишут в форме

$$dQ = q(x)\,dx. \tag{3}$$

Затем остается лишь «просуммировать» эти «элементы», что приводит к формуле (2).

Мы подчеркиваем, что пользование здесь интегралом, вместо обыкновенной суммы, весьма существенно. Сумма давала бы лишь приближенное выражение для Q, ибо на ней отразились бы погрешности отдельных равенств типа (3); предельный же переход, с помощью которого из суммы получается интеграл, уничтожает погрешность и приводит к совершенно точному результату. Итак, сначала в интересах простоты, в выражении элемента dQ отбрасываются бесконечно малые высших порядков и выделяется главная часть, а затем, в интересах точности, суммирование заменяется интегрированием, и просто получаемый результат оказывается точным.

Впрочем, можно было бы подойти к вопросу и с иной точки зрения. Обозначим через $Q(x)$ переменную часть величины Q, отвечающую промежутку $[a, x]$, причем $Q(a)$, естественно, полагаем равным нулю. Ясно, каким образом рассмотренная выше «функция промежутка» $Q([\alpha, \beta])$ выражается через эту «функцию точки» $Q(x)$:

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha).$$

В наших примерах функциями точки являются: 1) переменная дуга $\breve{AM}$, 2) площадь переменной трапеции $AA'M'M$ и, наконец, 3) объем тела, полученного от вращения именно этой трапеции.

Величина ΔQ есть попросту приращение функции $Q(x)$, а произведение $q(x)\,dx$, представляющее собой его главную часть, есть не что иное, как дифференциал этой функции. Таким образом, равенство (3), написанное в дифференциальных обозначениях, на деле является теперь не приближенным, а точным. Отсюда также сразу получается требуемый результат:

$$\int_a^b q(x)\,dx = Q(b) - Q(a) = Q([a, b]) = Q.$$

Отметим все же, что в приложениях более удобной и плодотворной является идея суммирования бесконечно малых элементов (Лейбниц!) — с подразумевающимся предельным переходом.

205. Площадь поверхности вращения. В виде первого примера применения изложенной схемы мы рассмотрим вопрос из области геометрии — о вычислении площади поверхности вращения.

Мы лишены возможности установить здесь в общем виде понятие площади кривой (т. е. неплоской) поверхности — это будет сделано во втором томе. Поэтому сейчас мы лишь научимся вычислять площадь поверхности вращения, считая ее существующей и обладающей свойством аддитивности. Впоследствии мы убедимся, что полученная нами формула входит как частный случай в общую формулу для площади кривой поверхности.

Итак, пусть имеем на плоскости xy (именно в верхней полуплоскости) некоторую кривую AB, заданную уравнениями вида

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \qquad (4)$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

где φ и ψ — функции от параметра, непрерывные вместе со своими производными. Для простоты будем предполагать ее незамкнутой и лишенной кратных точек.

Нам удобно, в данном случае, ввести в качестве параметра дугу s, отсчитываемую от точки $A(t_0)$, и перейти к представлению

$$x=\Phi(s), \quad y=\Psi(s), \quad (5)$$
$$(0 \leqslant s \leqslant S)$$

о котором была речь в n°202. Параметр s изменяется здесь от 0 до S, если через S обозначить длину всей кривой AB.

Черт. 90.

Задача состоит в определении площади Q поверхности, полученной от вращения кривой AB вокруг оси x. Обращаем внимание читателя на то, что роль независимой переменной здесь играет s, с промежутком изменения $[0, S]$.

Если выделить э л е м е н т ds кривой (черт. 90), то его приближенно можно принять за прямолинейный и вычислять соответствующий ему элемент площади dQ как площадь усеченного конуса с образующей ds и радиусами основания y и $y+dy$. Тогда, по известной из школьного курса формуле,

$$dQ=2\pi\frac{y+(y+dy)}{2}\,ds.$$

Впрочем, это еще не та формула, к которой мы стремимся — произведение $dy \cdot ds$ двух бесконечно малых надлежит отбросить. Мы придем к линейной относительно ds формуле

$$dQ = 2\pi y \, ds,$$

откуда уже, «суммируя», окончательно получим

$$Q = 2\pi \int_0^S y \, ds, \tag{6}$$

где под y надлежит разуметь фигурирующую в (5) функцию $\Psi(s)$.

Если вернуться к общему параметрическому заданию (4) нашей кривой, то, произведя в предшествующем интеграле замену переменной [см. n°186 (2)], преобразуем его к виду

$$Q = 2\pi \int_{t_0}^{T} y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} \, dt = 2\pi \int_{t_0}^{T} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \, dt. \tag{6а}$$

В частности, если кривая задана явным уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, так что в роли параметра оказывается x, будем иметь:

$$Q = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y_x'^2} \, dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx. \tag{6б}$$

Примеры. 1) Определить площадь поверхиости шарового пояса.

Пусть полукруг, описанный около начала радиусом r, вращается вокруг оси x. Из уравнения круга имеем $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; далее,

$$y_x' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y_x'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$y\sqrt{1 + y_x'^2} = r.$$

В таком случае площадь поверхности пояса, описаииого дугой, концы которой имеют абсциссы x_1 и $x_2 > x_1$, по формуле (6б) будет

$$Q = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} r \, dx = 2\pi r (x_2 - x_1) = 2\pi r h,$$

где h — высота пояса. Таким образом, площадь поверхности шарового пояса равна произведению окружности большого круга на высоту пояса.

В частности, при $x_1 = -r$, $x_2 = r$, т. е. при $h = 2r$, получаем площадь всей шаровой поверхности $Q = 4\pi r^2$.

2) Найти площадь поверхиости, образованной вращением дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Так как $y = 2a\sin^2\frac{t}{2}$, $ds = 4a\sin\frac{t}{2}\,dt$, то

$$Q = 2\pi\int_0^{2\pi} 4a^2\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du =$$

$$= 16\pi a^2\left(\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

206. Нахождение статических моментов и центра тяжести кривой. Как известно, статический момент K материальной точки массы m относительно некоторой оси равен произведению из массы m на расстояние d точки от оси. В случае системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, лежащих в одной плоскости с осью, соответственно, на расстояниях $d_1, d_2, \ldots, d_n$ от оси, статический момент выразится суммой

$$K = \sum_i m_i d_i.$$

При этом расстояния точек, лежащих по одну сторону от оси, берутся со знаком плюс, а расстояния точек по другую сторону — со знаком минус.

Если же массы не сосредоточены в отдельных точках, но расположены сплошным образом, заполняя линию или плоскую фигуру, то тогда для выражения статического момента вместо суммы потребуется интеграл.

Остановимся на определении статического момента K_x относительно оси x масс, расположенных вдоль некоторой плоской кривой AB (черт. 90). При этом мы предположим кривую однородной, так что ее линейная плотность ρ (т. е. масса, приходящаяся на единицу длины) будет постоянной; для простоты допустим даже, что $\rho = 1$ (в противном случае придется полученный результат лишь умножить на ρ). При этих предположениях масса любой дуги нашей кривой измеряется просто ее длиной, и понятие о статическом моменте приобретает чисто геометрический характер. Заметим, вообще, что когда говорят о статическом моменте (или центре тяжести) кривой — без упоминания о распределении вдоль по ней масс, то всегда имеют в виду статический момент (центр тяжести), определенный именно при указанных предположениях.

Выделим снова некий элемент ds кривой (масса которого также выражается числом ds). Приняв этот элемент приближенно за материальную точку, лежащую на расстоянии y от оси, для его статического момента получим выражение

$$dK_x = y\,ds.$$

Суммируя эти элементарные статические моменты, причем за независимую переменную возьмем дугу s, отсчитываемую от точки A, получим

$$K_x = \int_0^S y\, ds.$$

Аналогично выражается и момент относительно оси y:

$$K_y = \int_0^S x\, ds.$$

Конечно, здесь предполагается, что y (или x) выражено через s. Практически в этих формулах выражают s через ту переменную t, x или θ, которая играет роль независимой в аналитическом представлении кривой.

Статические моменты K_x и K_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести $C(\xi, \eta)$. Точка C обладает тем свойством, что если в ней сосредоточить всю «массу» S кривой (выражаемую тем же числом, что и длина), то момент этой массы относительно любой оси совпадает с моментом кривой относительно этой оси; в частности, если рассмотреть моменты кривой относительно осей координат, то найдем

$$S\xi = K_y = \int_0^S x\, ds, \qquad S\eta = K_x = \int_0^S y\, ds,$$

откуда

$$\xi = \frac{K_y}{S} = \frac{\int_0^S x\, ds}{S}, \qquad \eta = \frac{K_x}{S} = \frac{\int_0^S y\, ds}{S}. \tag{7}$$

Из формулы для ординаты η центра тяжести мы получаем замечательное геометрическое следствие. В самом деле, имеем

$$\eta S = \int_0^S y\, ds,$$

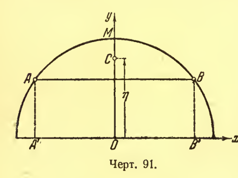
откуда

$$2\pi\eta \cdot S = 2\pi \int_0^S y\, ds;$$

но правая часть этого равенства есть площадь Q поверхности, полученной от вращения кривой AB [**205**, (6)], в левой же части равенства $2\pi\eta$ обозначает длину окружности, описанной центром тяжести

кривой при вращеиии ее около оси x, а S есть длина нашей кривой. Таким образом, приходим к следующей *теореме Гульдина* *):

Величина поверхности, полученной от вращения кривой около некоторой не пересекающей ее оси, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести C кривой (черт. 90).



Черт. 91.

Эта теорема позволяет установить координату η центра тяжести кривой, если известны ее длина S и площадь Q описанной ею поверхности вращения. Вот тому примеры:

1) Пользуясь теоремой Гульдина, определить положение центра тяжести дуги AB (черт. 91) круга радиуса r.

Так как эта дуга симметрична относительно радиуса OM, проходящего через ее середину M, то ее центр тяжести C лежит на этом радиусе, и для полного определения положения центра тяжести необходимо лишь найти его расстояние η от центра O. Выбираем оси, как указано на чертеже, и обозначим длину дуги $\smile{AB}$ через s, а ее хорды $AB\ (=A'B')$ — через h. От вращения рассматриваемой дуги вокруг оси x получается шаровой пояс, площадь поверхности Q которого, как мы знаем [n°205, 1)] равна $2\pi rh$. По теореме Гульдина та же поверхность равна $2\pi\eta s$, так что $s\eta = rh$ и $\eta = \frac{rh}{s}$.

В частности, для полуокружности $h = 2r$, $s = \pi r$ и $\eta = \frac{2}{\pi} r \doteq 0{,}637r$.

2) Определить центр тяжести ветви циклоиды (черт. 79 на стр. 361):

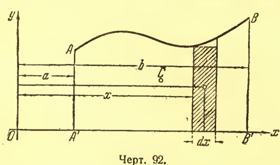
$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Если принять в расчет симметрию, то сразу ясно, что $\xi = \pi a$. Учитывая же результаты примера 2) n° 205, легко получить затем: $\eta = \frac{4}{3} a$.

207. Нахождение статических моментов и центра тяжести плоской фигуры. Рассмотрим плоскую фигуру $AA'B'B$ (черт. 92), ограниченную сверху кривой AB, которая задана явным уравнением $y = f(x)$. Предположим, что вдоль по этой фигуре равномерно распределены массы, так что поверхностная плотность их ρ (т. е. масса, приходящаяся на единицу площади) постоянна. Без существенного умаления общности можно тогда принять, что $\rho = 1$, т. е. что масса любой части нашей фигуры измеряется ее площадью. Это всегда и подразумевается, если говорят просто о статических моментах (или о центре тяжести) плоской фигуры.

*) Пауль Гульдин (1577—1643) — швейцарский математик. Заметим, впрочем, что обе его теоремы (см. следующий номер) были известны еще Паппу — выдающемуся греческому математику III века нашей эры.

Желая определить статические моменты K_x, K_y этой фигуры относительно осей координат, мы выделим, как обычно, какой-нибудь элемент нашей фигуры в виде бесконечно узкой вертикальной полоски (см. чертеж). Приняв эту полоску приближенно за прямоугольник, мы видим, что масса ее (выражаемая тем же числом, что и площадь) будет $y\,dx$. Для определения соответствующих элементарных моментов dK_x, dK_y предположим всю массу полоски сосредоточенной в ее центре тяжести (т. е. в центре прямоугольника), что, как



Черт. 92.

известно, не изменяет величины статических моментов. Полученная материальная точка отстоит от оси x на расстоянии $\frac{1}{2}y$, от оси y — на расстоянии $\left(x+\frac{1}{2}dx\right)$; последнее выражение можно заменить просто через x, ибо отброшенная величина $\frac{1}{2}dx$, умноженная на массу $y\,dx$, дала бы бесконечно малую второго порядка. Итак, имеем

$$dK_x = \frac{1}{2}y^2\,dx, \qquad dK_y = xy\,dx.$$

Просуммировав эти элементарные моменты, придем к результатам

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \qquad K_y = \int_a^b xy\,dx, \tag{8}$$

причем под y разумеется, конечно, функция $f(x)$, фигурирующая в уравнении кривой AB.

Как в случае кривой, по этим статическим моментам рассматриваемой фигуры относительно осей координат легко определить теперь и координаты ξ, η центра тяжести фигуры. Если через P обозначить площадь (а следовательно, и массу) фигуры, то по основному свойству центра тяжести

$$P\xi = K_y = \int_a^b xy\,dx, \qquad P\eta = K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx.$$

откуда

$$\xi = \frac{K_y}{P} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{P}, \qquad \eta = \frac{K_x}{P} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{P}. \tag{9}$$

И в данном случае мы получаем важное геометрическое следствие из формулы для ординаты η центра тяжести. В самом деле, из этой формулы имеем

$$2\pi\eta P = \pi \int_a^b y^2\,dx.$$

Правая часть этого равенства выражает объем V тела, полученного от вращения плоской фигуры $AA'B'B$ около оси x [n°198, (9)], левая же часть выражает произведение площади этой фигуры P на $2\pi\eta$ — длину окружности, описанной центром тяжести фигуры. Отсюда вторая *теорема Гульдина*:

Объем тела вращения плоской фигуры около не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры:

$$V = P \cdot 2\pi\eta.$$

Заметим, что формулы (8), (9) распространяются на случай фигуры, ограниченной кривыми и снизу и сверху (черт. 75 на стр. 359). Например, для этого случая

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx, \qquad K_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx; \tag{8a}$$

отсюда ясно уже, как преобразуются формулы (9). Если вспомнить формулу (5) n°196, то легко усмотреть, что теорема Гульдина справедлива также и для этого случая.

Примеры. 1) Найти статические моменты K_x, K_y и координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$, осью x и ординатой, соответствующей абсциссе x.

Так как $y = \sqrt{2px}$, то по формулам (8)

$$K_x = \frac{1}{2}\cdot 2p\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}px^2, \qquad K_y = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}\,x^{\frac{5}{2}}.$$

С другой стороны, площадь [n°196, (4)]

$$P = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$$

В таком случае, по формулам (9),

$$\xi=\frac{3}{5}x, \quad \eta=\frac{3}{8}\sqrt{2px}=\frac{3}{8}y.$$

Пользуясь значениями ξ и η, легко найти — по теореме Гульдина — объем тела вращения рассматриваемой фигуры вокруг осей координат или вокруг конечной ординаты. Например, если остановиться на последнем случае, так как расстояние центра тяжести от оси вращения есть $\frac{2}{5}x$, то искомый объем будет $V=\frac{8}{15}\pi x^2 y$.

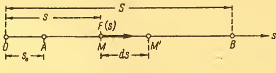
2) Найти центр тяжести фигуры, ограниченной ветвью циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью x.

Воспользовавшись n°196, 4) и n°198, 2), по теореме Гульдина легко установить $\eta=\frac{5}{6}a$. По симметрии: $\xi=\pi a$.

208. Механическая работа. Пусть точка M движется по прямой (этим случаем мы ограничиваемся для простоты), причем на перемещении s на нее вдоль той же прямой действует постоянная сила F. Из элементов механики читателю известно, что тогда работа W этой силы выразится произведением $F\cdot s$.

Чаще, однако, случается, что величина силы не остается постоянной, а непрерывно меняется от точки к точке, и для выражения работы снова приходится прибегнуть к определенному интегралу.

Пусть путь s, проходимый точкой, будет независимой переменной; при этом предположим, что начальному положению A нашей точки M соответствует значение $s=s_0$, а конечному B — значение



Черт. 93.

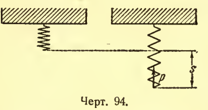
$s=S$ (черт. 93). Каждому значению s в промежутке $[s_0, S]$ отвечает определенное положение движущейся точки, а также определенное значение величины F, которую, таким образом, можно рассматривать как функцию от s. Взяв точку M в каком-нибудь ее положении, определяемом значением s пути, найдем теперь приближенное выражение для элемента работы, соответствующего приращению ds пути, от s до $s+ds$, при котором точка M перейдет в близкое положение M' (см. чертеж). В положении M на точку действует определенная сила F; так как изменение этой величины при переходе точки из M в M' — при малом ds — также мало, пренебрежем этим изменением и, считая величину силы F приближенно постоянной, найдем для элемента работы на перемещении ds выражение

$$dW=F\cdot ds,$$

так что вся работа W представится интегралом

$$W = \int_{s_0}^{S} F\,ds. \tag{10}$$

Пример. Применим в виде примера формулу (10) к вычислению работы растяжения (или сжатия) пружины с укрепленным одним концом (черт. 94); с этим приходится иметь дело, например, при расчете буферов у железнодорожных вагонов.



Черт. 94.

Известно, что растяжение s пружины (если только пружина не перегружена) создает натяжение p, по величине пропорциональное растяжению, так что $p = cs$, где c — некоторая постоянная, зависящая от упругих свойств пружины («жесткость» пружины). Сила, растягивающая пружину, должна преодолевать это натяжение. Если учитывать только ту часть действующей силы, которая на это затрачивается, то ее работа при возрастании растяжения от $s_0 = 0$ до S выразится так:

$$W = \int_0^S p\,ds = c\int_0^S s\,ds = \frac{cS^2}{2}.$$

Обозначив через P наибольшую величину натяжения или преодолевающей ее силы, соответствующую растяжению пружины (и равную cS), мы можем представить выражение для работы в виде

$$W = \frac{1}{2}PS.$$

Если бы к свободному концу пружины сразу была приложена сила P (например, подвешен груз), то на перемещении S ею была бы произведена вдвое бо́льшая работа PS. Как видим, лишь половина ее затрачивается на растяжение пружины; другая половина пойдет на сообщение пружине с грузом кинетической энергии.

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. КАСАТЕЛЬНАЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

209. Аналитическое представление кривых на плоскости. В настоящей главе мы в виде примера коснемся лишь немногих приложений дифференциального исчисления к геометрии — преимущественно на плоскости. Подробно эти приложения изучаются в дифференциальной геометрии, представляющей собой самостоятельную математическую дисциплину.

Вспомним сначала различные способы аналитического представления кривых на плоскости (известные читателю из аналитической геометрии), предполагая, что в основу положена некоторая прямоугольная система координат *).

1°. Выше мы не раз рассматривали уравнение вида

$$y = f(x) \qquad [\text{или } x = g(y)] \tag{1}$$

и изучали соответствующую ему кривую. Такого рода задание кривой, когда одна из текущих координат ее точки непосредственно представляется в виде однозначной функции от другой координаты, мы будем называть явным заданием (или представлением) кривой. Оно обладает особой простотой и наглядностью.

Примером может служить *парабола* $y = ax^2$.

2°. Впрочем, в аналитической геометрии кривая чаще задавалась уравнением, не разрешенным ни относительно x, ни относительно y:

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

которое называют неявным уравнением кривой.

---

*) Оговорим раз навсегда, что функции, о которых будет идти речь в этой главе, как правило, предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные же производные по своим аргументам; в случае надобности, мы будем требовать существования и непрерывности и дальнейших производных.

Пример. *Эллипс* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Иной раз мы в состоянии выразить из уравнения (2) одну переменную через другую, например, y через x, и представить кривую (или ее часть) явным уравнением (1). Так, в случае эллипса:

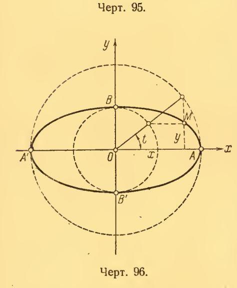
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$(\text{для } -a\leqslant x\leqslant a).$$

Черт. 95.

В других случаях, хотя зависимость, скажем y от x, и определяется уравнением (2), и — при известных условиях *) — существует однозначная функция (1), удовлетворяющая уравнению (2), и даже можно утверждать, что эта «неявная» функция непрерывна и имеет непрерывную производную, но явного выражения для нее мы напнсать не можем. Так, например, будет в случае *декартова листа*: $x^3+y^3-3axy=0$ (черт. 95).

3°. Наконец, в предыдущем изложении упоминалось о том, что уравнения вида

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\tag{3}$$



Черт. 96.

устанавливающие зависнмость текущих координат точки от некоторого параметра t, также определяют кривую на плоскости. Подобные уравнения называют параметрическими; они дают параметрическое представление кривой.

Примером, прежде всего, может служить параметрнческое представленне *эллипса*:

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t.$$

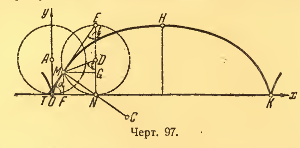
При изменении параметра t (геометрическнй смысл которого ясен из черт. 96) от нуля до 2π, эллнпс описывается протнв часовой стрелкн, начиная от конца $A(a, 0)$ большой оси.

В качестве второго примера, упомянем не раз встречавшуюся нам *циклоиду*:

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t).$$

*) См. по этому поводу главу XIX во втором томе.

которая представляет собой траекторию точки круга, катящегося по прямой (черт. 97). В роли параметра здесь оказывается угол $t = \measuredangle NDM$ между подвижным радиусом DM и первоначальным его положением OA. При



Черт. 97.

изменении t от нуля до 2π точка опишет дугу, изображенную на чертеже. Вся кривая, отвечающая изменению t от $-\infty$ до $+\infty$, состоит из бесчисленного множества таких дуг.

210. Касательная к плоской кривой. Понятие касательной нам уже встречалось не раз [см., например, n° 77]. Кривая, заданная явным уравнением

$$y = f(x),$$

в каждой своей точке (x, y) имеет касательную, угловой коэффициент которой $\operatorname{tg} \alpha$ выражается формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = f'(x).$$

Таким образом, уравнение касательной имеет вид:

$$Y - y = y'_x (X - x). \tag{4}$$

Здесь (как и ниже) X, Y означают текущие координаты, а x, y — координаты точки касания.

Легко получить и уравнение нормали, т. е. прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно к касательной:

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x)$$

или

$$X - x + y'_x (Y - y) = 0. \tag{5}$$

Черт. 98.

В связи с касательной и нормалью рассматривают некоторые отрезки — именно отрезки TM и MN и их проекции TP и PN на ось x (черт. 98). Последние называются, соответственно, подкасательной и поднормалью и обозначаются через sbt (subtangens) и sbn (subnormal). Полагая в уравнениях (4) и (5) $Y = 0$,

легко вычислить, что

$$sbt = TP = \frac{y}{y'_x}, \qquad sbn = PN = yy'_x. \tag{6}$$

1) Например, для *параболы* $y = ax^2$ имеем:

$$sbt = \frac{y}{y'_x} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2}$$

— результат, уже известный нам [см. сноску на стр. 143].

Обратимся теперь к случаю неявного задания кривой уравнением (2). Если допустить, что это уравнение вблизи интересующей нас точки равносильно уравнению вида (1) *), то кривая в этой точке заведомо имеет касательную (4). В п°**141**, 4) мы научились выражать производную y'_x «неявной» функции — нам непосредственно не известной — через известные производные F'_x и F'_y; именно, мы имели

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

в предположении, что $F'_y \neq 0$. [Заметим попутно, что это как раз и есть то условие, при соблюдении которого уравнение (2) в окрестности рассматриваемой точки кривой оказывается равносильным уравнению вида (1)]. Подставляя найденное выражение для y'_x в уравнение касательной, после простых преобразований получим уравнение:

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \tag{7}$$

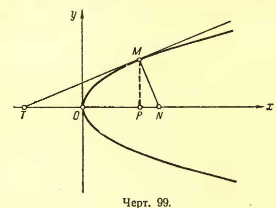
Ввиду полной симметричности его относительно x и y, ясно, что то же уравнение для касательной получится, если обменять x и y ролями, предполагая $F'_x \neq 0$. Лишь если в рассматриваемой точке обе производные F'_x, F'_y одновременно равны нулю, равенство (7) превращается в тождество и перестает быть уравнением определенной прямой. В этом случае точку (x, y) называют особой точкой кривой; в особой точке кривая на деле может и не иметь определенной касательной!

Примеры. 2) *Парабола*: $y^2 = 2px$ (черт. 99). Продифференцируем это равенство, считая y функцией от x; получим $yy'_x = p$. Таким образом [см. (6)], поднормаль параболы есть постоянная величина. Отсюда вытекает простой способ построения нормали, а с ней и касательной к параболе.

---

*) Та же сноска, что и на стр. 392.

Впрочем, в этом случае и подкасательная выражается просто — разделив уравнение параболы почленно на только что полученное равенство, сразу



Черт. 99.

находим:

$$\frac{y}{y'_x} = 2x \quad \text{или} \quad sbt = 2x.$$

3) *Эллипс*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (черт. 100).

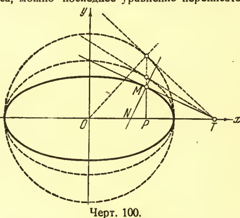
По формуле (7) имеем такое уравнение касательной:

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) = 0.$$

Учитывая само уравнение эллипса, можно последнее уравнение переписать в более простом виде:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

Полагая здесь $Y = 0$, найдем $X = \frac{a^2}{x}$. Таким образом, точка T пересечения касательной с осью x не зависит ни от y, ни от b. Касательные к различным эллипсам, отвечающим различным значениям b, в их точках, имеющих абсциссу x, все проходят через одну и ту же точку T на оси x. Так как при $b = a$ получается окружность, для которой касательная строится просто, то точка T сразу определяется, и это приводит к простому способу построения касательной к эллипсу, ясному из чертежа.



Черт. 100.

4) Для *декартова листа*: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ обе частные производные от левой части уравнения

$$3(x^2 - ay) \quad \text{и} \quad 3(y^2 - ax)$$

обращаются в нуль одновременно в начале координат; как видно из черт. 95, в этой особой точке кривой, в действительности, нет определенной касательной.

Наконец, рассмотрим кривую, заданную параметрическими уравнениями (3). Если в выбранной точке производная $x'_t = \varphi'(t)$ отлична от нуля, скажем, больше нуля, то она и вблизи этой точки положительна; значит, функция $x = \varphi(t)$ монотонно возрастает [п°111], а тогда и t будет возрастающей функцией от $x: t = t(x)$ [п°71], с производной $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ [п°80]. Подставляя эту функцию от x, вместо t, в уравнение $y = \psi(t)$, получим, что на некотором участке кривой y является функцией от x:

$$y = \psi(t(x)) = f(x),$$

также имеющей производную. Таким образом оказывается, что примыкающий к взятой точке отрезок кривой способен выражаться и явным уравнением: в таком случае кривая в этой точке имеет касательную.

Угловой коэффициент касательной может быть выражен следующим образом:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

Подставляя это выражение в уравнение (4) касательной, легко преобразуем его к виду пропорции:

$$\frac{X - x}{x'_t} = \frac{Y - y}{y'_t}. \tag{9}$$

Часто, впрочем, умножают оба знаменателя на dt и пишут уравнение касательной и так:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}. \tag{10}$$

Если бы мы предположили, что в выбранной точке отлична от нуля производная $y'_t = \psi'(t)$, то, обменяв x, y ролями, пришли бы к тому же уравнению касательной. Лишь в том случае, когда в данной точке обе производные x'_t и y'_t обращаются в нуль одновременно, наше рассуждение не приложимо. Такая точка тоже называется особой точкой кривой: в ней касательной может и не быть. Кстати, и уравнения (9) или (10) теряют смысл: оба знаменателя — нули.

5) В качестве примера, рассмотрим задачу о проведении касательной к *циклоиде*: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (черт. 97). Имеем в этом случае

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t,$$

так что особыми будут точки, отвечающие $t=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. За исключением этих точек, по формуле (8),

$$\operatorname{tg} \alpha=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg} \frac{t}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right),$$

и можно принять $\alpha=\frac{\pi}{2}-t$.

Вспомним (черт. 97), что $t=\measuredangle MDN$, так что $\measuredangle MEN=\frac{t}{2}$. Если продолжить прямую EM до пересечения в T с осью x, то $\measuredangle ETx=\frac{\pi}{2}-t=\alpha$. Следовательно, прямая ME, соединяющая точку циклоиды с высшей точкой катящегося круга в соответствующем положении, и будет касательной. Отсюда ясно, что прямая MN будет нормалью.

Впоследствии нам полезно будет выражение для отрезка n нормали до пересечения с осью x, которое легко получить из прямоугольного треугольника MEN. Именно,

$$n=MN=2a \sin \frac{t}{2}.$$

На этот раз и в особых точках касательные существуют — они параллельны оси y; однако самое расположение кривой относительно касательных в этих точках необычно: налицо острия («точки возврата»).

211. Положительное направление касательной. До сих пор мы определяли положение касательной к кривой ее угловым коэффициентом $\operatorname{tg} \alpha$, не различая двух противоположных направлений на самой касательной: $\operatorname{tg} \alpha$ для обоих один и тот же. В некоторых исследованиях, однако, представляется необходимым фиксировать одно из этих направлений.

Представим себе кривую, заданную параметрическими уравнениями (3), и рассмотрим «обыкновенную», т. е. не особую, ее точку. В этой точке, как мы видели в n°202, существуют производные

$$x_s'=\frac{dx}{ds}, \quad y_s'=\frac{dy}{ds},$$

причем

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1, \tag{11}$$

как это легко получить из основного соотношения

$$dx^2+dy^2=ds^2$$

[202, (6)] делением на ds^2.

Прежде чем перейти к существу указанного в заголовке вопроса, установим одно вспомогательное утверждение, которое будет нам полезно и в последующем.

Лемма. Пусть M — обыкновенная точка кривой (черт. 101). *Если через M_1 обозначить переменную точку той же кривой, то*

при стремлении M_1 *к* M *отношение длины хорды* MM_1 *к длине дуги* $\overset{\frown}{MM_1}$ *будет стремиться к единице*:

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1. \qquad (12)$$

Примем дугу за параметр, и пусть точка M отвечает значению s дуги, а точка M_1 — значению $s+\Delta s$. Их координаты пусть будут, соответственно, x, y и $x+\Delta x$, $y+\Delta y$. Тогда $\overset{\frown}{MM_1} = |\Delta s|$, а $MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, так что

$$\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta s|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}.$$

Переходя справа к пределу при $\Delta s \to 0$, в силу (11) и получаем требуемый результат.

Итак, при указанных условиях *бесконечно малые хорда и дуга оказываются эквивалентными*.

Пусть теперь на рассматриваемой кривой выбраны начальная точка и определенное направление для отсчета дуг; возьмем снова дугу за параметр, определяющий положение точки на кривой.

Черт. 101.

Пусть точке M, о которой была речь, отвечает дуга s. Если придать s положительное приращение Δs, то дуга $s+\Delta s$ определит новую точку M_1, лежащую от M в сторону возрастания дуг. Секущую направим от M к M_1, и угол, составленный именно этим направлением секущей с положительным направлением оси x, обозначим через β. Проектируя отрезок MM_1 на оси координат (черт. 101), по известной теореме из теории проекций, получим

$$\text{пр.}_x MM_1 = \Delta x = MM_1 \cos\beta, \quad \text{пр.}_y MM_1 = \Delta y = MM_1 \sin\beta,$$

откуда

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{MM_1}.$$

Так как $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$, то эти равенства можно переписать так:

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\Delta s}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1}. \qquad (31)$$

Будем называть положительным то направление касательной, которое идет в сторону возрастания дуг; точнее говоря, оно определяется как предельное положение при $\Delta s \to 0$ для луча MM_1, направленного так, как это разъяснено выше. Если угол положительного направления касательной с положительным направлением оси x обозначить через α, то из (13) получим в пределе, с учетом (12),

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{14}$$

Эти формулы определяют угол α уже с точностью до $2k\pi$ (k — целое), следовательно, действительно фиксируют одно из двух возможных направлений касательной, именно — положительное.

212. Случай пространственной кривой. На этом случае мы остановимся лишь вкратце, ввиду полной аналогии с плоской кривой.

Подобно тому, как мы это делали на плоскости, координаты переменной точки пространственной кривой можно задать в функции от некоторой вспомогательной переменной — параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{15}$$

с тем, чтобы при изменении параметра t точка, координаты которой даются этими уравнениями, описывала рассматриваемую кривую.

В случае пространственной кривой (15), определение касательной остается тем же, что и для плоской кривой. Исключим из рассмотрения особые точки кривой, для которых производные x'_t, y'_t, z'_t обращаются в нуль одновременно, и возьмем какую-либо обыкновенную точку $M(x, y, z)$ кривой, определяемую значением t параметра. Придадим t приращение Δt, тогда наращенному значению $t + \Delta t$ параметра будет отвечать другая точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Уравнения секущей MM' будут иметь вид

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z},$$

где X, Y, Z — текущие координаты. Геометрический смысл этих уравнений не изменится, если мы все знаменатели разделим на Δt:

$$\frac{X - x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y - y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z - z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Если эти уравнения в пределе, при $\Delta t \to 0$, сохраняют определенный смысл, то этим будет установлено существование предельного положения секущей, т. е. касательной *). Но

*) Мы переходили к пределу при $\Delta t \to 0$, но можно показать, что это равносильно, так сказать, более геометричному предположению: $MM_1 \to 0$.

в пределе мы получаем

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{Z-z}{z'_t}, \tag{16}$$

и эти уравнения, действительно, выражают прямую, поскольку не все знаменатели — нули. Таким образом, в каждой обыкновенной точке кривой касательная и существует и выражается этими уравнениями. Для особой точки вопрос о касательной остается открытым.

Иногда уравнения (16) удобно писать в виде

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}, \tag{17}$$

который получается из (16) умножением всех знаменателей на dt.

Если через α, β, γ обозначить углы, составленные касательной с осями координат, то направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ выразятся так:

$$\cos\alpha=\frac{x'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},$$

$$\cos\beta=\frac{y'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}}.$$

Черт. 102.

Выбор определенного знака перед радикалом отвечает выбору определенного направления касательной.

В качестве примера, рассмотрим *винтовую линию* (черт. 102)

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ct.$$

В этом случае

$$x'_t=-a\sin t,\quad y'_t=a\cos t,\quad z'_t=c,$$

и уравнения касательной имеют вид:

$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c}.$$

Направляющие косинусы касательной:

$$\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\qquad \cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\qquad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Отметим, что $\cos\gamma = \text{const}$, следовательно, и $\gamma = \text{const}$. Если представить себе винтовую линию навернутой иа прямой круглый цилиндр, то можио сказать, что винтовая лииия пересекает все образующие этого цилиндра под постоянным углом.

Для пространственной кривой, так же как и для плоской, в качестве параметра, определяющего положение точки, может быть выбрана дуга s, отсчитываемая от произвольно выбранного начала в определенном направлении. За положительное направление касательной выбирают направление в сторону возрастания дуг. Если речь идет об обыкновенной точке кривой, то для нее направляющие косинусы положительно направленной касательной выразятся так:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \tag{18}$$

[ср. n° 211].

213. Касательная плоскость к поверхности. Мы имели уже дело [n° **124**] с поверхностью, задаваемой уравнением

$$z = f(x, y); \tag{19}$$

это — явное задание поверхности *). В аналитической геометрии чаще поверхность задается неявным уравнением:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{20}$$

не разрешенным относительно ни одной переменной.

Примеры. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (*эллипсоид*),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\textit{конус второго порядка})$$

Как и в случае неявного задания плоской кривой, при известных условиях **), и здесь уравнение (20) оказывается равносильным уравнению вида (19), определяя одну из координат как функцию от двух остальных (с непрерывными частными производными), хотя мы можем и не знать явного выражения для этой функции.

Пусть $M(x, y, z)$ будет какая-либо точка поверхности (20). Проведем через M по поверхности произвольную кривую и в названной точке построим к этой кривой касательную; таких кривых (и касательных к ним) существует бесчисленное множество.

Если все касательные в точке M к различным кривым, проведенным через эту точку по поверхности, лежат в одной плоскости, то саму плоскость называют касательной

---

*) Коиечно, особая роль z случайна; явным будет и задаиие поверхности уравнениями вида: $x = g(y, z)$ или $y = h(z, x)$.

**) См. сноску на стр. 392.

плоскостью к поверхности в точке M; точку же M при этом называют точкой касания.

Кривую, проведенную по поверхности (20), можно вообще представить себе аналитически выраженной уравнениями вида (15). Так как, по предположению, кривая лежит на поверхности всеми своими точками, то при подстановке в уравнение (20) вместо x, y, z, соответственно, функций φ, ψ, χ, это уравнение обратится в тождество относительно параметра t. Дифференцируя это тождество по t, получим [с использованием инвариантности формы (первого) дифференциала, n° **143**]:

$$F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy + F'_z \cdot dz = 0, \tag{21}$$

где в качестве значений аргументов функций F'_x, F'_y, F'_z можно, в частности, взять координаты x, y, z точки касания M, а под dx, dy, dz надлежит разуметь дифференциалы функций (15) при соответствующем значении t. С другой стороны, касательная к рассматриваемой кривой в точке $M(x, y, z)$ выразится уравнениями (17), где X, Y, Z — текущие координаты, а dx, dy, dz — те же, что и только что. Подставляя в (21) вместо dx, dy, dz пропорциональные им — в силу (17) — разности $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, получим окончательно равенство

$$F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) + F'_z(Z-z) = 0, \tag{22}$$

которое, таким образом, выполняется для всех точек любой из (упомянутых в определении) касательных. Если хоть одна из производных F'_x, F'_y, F'_z в точке M отлична от нуля, то равенство (22) представляет уравнение плоскости, которая и будет касательной плоскостью.

В том исключительном случае, когда в рассматриваемой точке одновременно

$$F'_x = F'_y = F'_z = 0$$

(такая точка называется особой), равенство (22) обращается в тождество, и касательная плоскость может и не существовать.

Примеры. 1) *Эллипсоид*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Касательная плоскость получается по формуле (22), с учетом самого уравнения эллипсоида, в виде:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

2) *Конус второго порядка*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Касательная плоскость:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0.$$

В вершине (0, 0, 0) конуса, которая является особой точкой, это уравнение теряет смысл, и касательной плоскости нет.

Направляющие косинусы нормали к поверхности (так называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания), очевидно, будут

$$\cos\lambda=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},\qquad \cos\mu=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\nu=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

Явное уравнение (19) можно, переписав в виде

$$z-f(x,\ y)=0,$$

рассматривать как частный случай уравнения (20). Если ввести стандартные обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=q,$$

то для этого случая уравнение касательной плоскости (22) перепишется так:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{23}$$

а направляющие косинусы нормали будут:

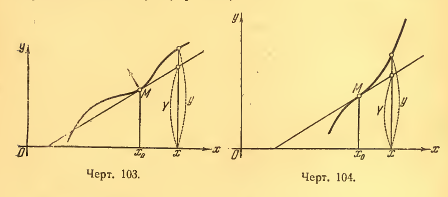
$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

§ 2. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

214. Направление вогнутости, точки перегиба. Рассмотрим какую-либо плоскую кривую, заданную, скажем, явным уравнением $y=f(x)$, и точку $M(x_0,\ f(x_0))$ на ней.

Говорят, что *в точке M кривая направлена вогнутостью в определенную сторону от касательной*, если в достаточно малой окрестности точки M кривая всеми точками лежит именно с этой стороны касательной (черт. 103). Точку называют *точкой перегиба*, если — снова в достаточно малой окрестности ее — точки кривой

с абсциссами $x < x_0$ лежат по одну сторону касательной, а точки с абсциссами $x > x_0$ — по другую, т. е. если в точке M кривая переходит с одной стороны касательной на другую или, короче, пересекает касательную (черт. 104).



Черт. 103. Черт. 104.

Так как уравнение касательной в точке M будет таково:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ ^{*)},$$

то для решения вопроса о направлении вогнутости или о наличии перегиба нужно изучить знак разности

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

в окрестности точки x_0. Предположим существование в этой окрестности непрерывной второй производной $f''(x)$.

Пусть сначала $f''(x_0) \neq 0$. Прибегнув к формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано [n° **107**, (17)] при $n = 2$, получим:

$$y - Y = \frac{f''(x_0) + \alpha}{2!}(x - x_0)^2,$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$. Для значений x, достаточно близких к x_0, эта разность сохраняет знак числа $f''(x_0)$, следовательно, *при* $f''(x_0) > 0$ *кривая в точке* M *вогнутостью направлена вверх, а при* $f''(x_0) < 0$ — *вниз.*

Если $f''(x_0) = 0$, то справа остается лишь член $\frac{\alpha}{2}$, который ничего не говорит о знаке разности $y - Y$. В этом случае возьмем дополнительный член в форме Лагранжа [n° **106**, (12)] также при $n = 2$:

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

*) Мы отошли здесь от обозначений, использованных в n° **210** [см. (4)], но по-прежнему обозначили текущую ординату точки касательной через Y, чтобы отличить ее от ординаты $y = f(x)$ точки кривой с той же абсциссой x.

где либо $x < c < x_0$, либо $x_0 < c < x$. *Если вблизи значения x_0 вторая производная $f''(x)$ сохраняет (как слева, так и справа) знак плюс или минус, то тот же знак сохраняет и разность $y - Y$, и вогнутость в точке M направлена, соответственно, вверх или вниз.*

Наоборот, *если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то меняет знак и разность $y - Y$, и в точке M налицо перегиб.* В этом случае точка перегиба M, если ограничиться достаточно малой ее окрестностью, как бы отделяет те точки, где вогнутость кривой направлена вверх, от точек с направлением вогнутости вниз*).

Для примера рассмотрим *синусоиду*: $y = \sin x$; здесь $y'' = -\sin x = -y$. Следовательно, в промежутках, где $\sin x$ сохраняет знак плюс (минус), синусоида вогнутостью направлена вниз (вверх). Для значений вида $x = k\pi$ (k — целое) y'' обращается в нуль, меняя при этом знак; им отвечают точки перегиба синусоиды. Наоборот, для функции $y = x^4$ имеем $y'' = 12x^2$, и хотя при $x = 0$ вторая производная обращается в нуль, но при других значениях x она сохраняет знак плюс, и кривая везде направлена вогнутостью вверх.

Для наличия перегиба (если предположить существование второй производной) условие $y'' = 0$ является необходимым, но не достаточным.

В этом легко усматривается аналогия с теорией экстремумов [ср. **112** и след.].

Заметим в заключение, что, вместо исследования знака второй производной $f''(x)$ вблизи точки x_0, здесь также можно рассматривать последовательные производные $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \ldots$ в самой точке x_0. Так как относящиеся сюда соображения вполне аналогичны проведенным в n° **117**, то предоставляем их читателю.

Замечание. Исследование кривой на точки перегиба позволяет уточнить построение графиков функций по сравнению с тем, что об этом сказано в n° **115**.

215. Понятие кривизны. Рассмотрим дугу кривой без кратных и особых точек, заданную параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{1}$$

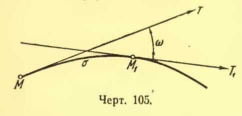
Если в каждой ее точке провести касательную (скажем, в положительном направлении), то вследствие «искривленности» кривой эта касательная с перемещением точки касания будет вращаться; этим кривая существенно отличается от прямой, для которой касательная (совпадающая с ней) сохраняет одно и то же направление для всех точек.

Важным элементом, характеризующим течение кривой, является «степень искривленности» или «кривизна» ее в различных точках; эту кривизну можно выразить числом.

---

*) Иногда именно это свойство кладут в основу определения точек перегиба. Такое определение не вполне равносильно определению, данному в тексте.

Пусть $\smile{MM_1}$ (черт. 105) есть дуга кривой; рассмотрим касательные MT и M_1T_1, проведенные (в положительном направлении) в конечных точках этой дуги. Естественно кривизну кривой характеризовать углом поворота касательной, рассчитанным на единицу длины дуги, т. е. отношением $\frac{\omega}{\sigma}$, где угол ω измеряется в радианах, а длина σ — в выбранных единицах длины. *Это отношение называют средней кривизной дуги кривой.*

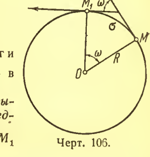


Черт. 105.

На различных участках кривой средняя кривизна ее будет, вообще говоря, различной. Существует, впрочем (единственная), кривая, для которой средняя кривизна везде одинакова: это окружность*). Действительно, для нее имеем (черт. 106)

$$\frac{\omega}{\sigma}=\frac{\omega}{R\omega}=\frac{1}{R},$$

о какой бы дуге окружности ни шла речь.



Черт. 106.

От понятия средней кривизны дуги $\smile{MM_1}$ перейдем к понятию кривизны в точке.

Кривизной кривой в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна дуги $\smile{MM_1}$, когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к M.

Обозначив кривизну кривой в данной точке буквой k, будем иметь

$$k=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\omega}{\sigma}.$$

Для окружности, очевидно, $k=\frac{1}{R}$, т. е. кривизна окружности есть величина, обратная радиусу окружности.

Замечание. Понятия средней кривизны и кривизны в данной точке совершенно аналогичны понятиям средней скорости и скорости в данный момент для движущейся точки. Можно сказать, что средняя кривизна характеризует среднюю скорость изменения направления касательной на некоторой дуге, а кривизна в точке — истинную скорость изменения этого направления, приуроченную к данной точке.

---

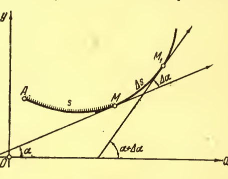
*) Не считая, разумеется, прямой, для которой кривизна всегда нуль.

Обратимся теперь к выводу аналитического выражения для кривизны, по которому ее можно было бы вычислять, исходя из параметрического задания кривой.

Предположим сначала, что в роли параметра фигурирует дуга. Возьмем на кривой обыкновенную точку M, и пусть ей отвечает значение s дуги. Придав s произвольное приращение Δs, получим другую точку $M_1(s+\Delta s)$ (черт. 107). Приращение $\Delta\alpha$ угла наклона касательной при переходе от M к M_1 даст угол ω между обеими касательными: $\omega=\Delta\alpha$. Так как $\sigma=\Delta s$, то средняя кривизна будет равна $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

Устремив $\overset{\smile}{MM_1}=\Delta s$ к нулю, для кривизны кривой в точке M получим выражение

$$k=\frac{d\alpha}{ds}. \qquad (2)$$



Черт. 107.

Важно отметить, впрочем, что эта формула верна лишь с точностью до знака, так как кривизна, по нашему определению, есть число неотрицательное, а справа может получиться и отрицательный результат. Дело в том, что как $\Delta\alpha$, так и Δs могут быть отрицательными, так что, строго говоря, следовало бы писать: $\omega=|\Delta\alpha|$, $\sigma=|\Delta s|$ и, наконец,

$$k=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Это замечание следует иметь в виду и впредь.

Для того чтобы придать формуле (2) вид, удобный для непосредственного вычисления (а вместе с тем установить самое существование кривизны), на этот раз предположим, что функции φ и ψ, фигурирующие в параметрическом задании (1) кривой, имеют непрерывные производные первых двух порядков.

Если рассматриваемая точка $M(t)$ является обыкновенной, то без умаления общности можно считать, что именно $x'_t=\varphi'(t)\neq 0$.

Перепишем теперь формулу (2) иначе:

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'_t}{s'_t}. \qquad (3)$$

Но $s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}$ [n°202, (5)], остается лишь найти α'_t. Так как [n°211, (8)]

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{и} \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{y'_t}{x'_t},$$

то

$$\alpha'_t = \frac{1}{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t + y'^2_t}. \tag{4}$$

Подставив в (3) значения s'_t и α'_t, придем к окончательной формуле:

$$k = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{3/2}}. \tag{5}$$

Эта формула вполне пригодна для вычисления, ибо все фигурирующие в ней производные легко вычисляются по параметрическим уравнениям кривой.

Если кривая задана явным уравнением $y = f(x)$, то эта формула принимает вид

$$k = \frac{y''_{x^2}}{\left(1 + y'^2_x\right)^{3/2}}. \tag{5a}$$

Наконец, если дано полярное уравнение кривой: $r = g(\theta)$, то, как обычно, можно перейти к параметрическому представлению в прямоугольных координатах, принимая за параметр θ. Тогда с помощью (5) получим

$$k = \frac{r^2 + 2r'^2_\theta - rr''_{\theta^2}}{\left(r^2 + r'^2_\theta\right)^{3/2}}. \tag{5б}$$

216. Круг кривизны и радиус кривизны. Во многих исследованиях представляется удобным приближенно заменить кривую вблизи рассматриваемой точки окружностью, имеющей ту же кривизну, что и кривая в этой точке.

Мы будем называть кругом) кривизны кривой в данной на ней точке M круг, который*

1) *касается кривой в точке M*;

2) *направлен вогнутостью в этой точке в ту же сторону, что и кривая*;

3) *имеет ту же кривизну, что и кривая в точке M* (черт. 108).

Центр C круга кривизны называется просто центром кривизны, а радиус этого круга — радиусом кривизны (кривой в данной точке).

Из определения круга кривизны явствует, что центр кривизны всегда лежит на нормали к кривой в рассматриваемой точке со стороны вогнутости. Если кривизну кривой в данной точке обозначить через k, то, вспоминая [n° **215**], что для окружности имели формулу $k = \frac{1}{R}$, теперь для радиуса кривизны, очевидно, будем иметь

$$R = \frac{1}{k}.$$

*) В этом контексте слово «круг» привычным образом употребляется в смысле «окружность».

Пользуясь различными выражениями, выведенными в предыдущем номере для кривизны, мы можем сразу же написать ряд формул для радиуса кривизны:

$$R = \frac{ds}{d\alpha}, \tag{6}$$

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}}{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}, \tag{7}$$

$$R = \frac{(1 + y_x'^2)^{3/2}}{y_{x^2}''}, \tag{7a}$$

$$R = \frac{(r^2 + r_\theta'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r_\theta'^2 - r r_{\theta^2}''}, \tag{7б}$$

которые и применяются в соответственных случаях.

Черт. 108.

Сюда также относится замечание о знаке, которое было сделано по поводу выражения для кривизны [n° **215**].

Впрочем, вместо отбрасывания знака, можно было бы истолковать его геометрически, связывая это с тем, в какую сторону от (положительно направленной [n° **211**]) касательной приходится откладывать радиус кривизны по нормали в точке касания. Именно, при обычном расположении координатных осей положительный знак радиуса кривизны указывает на то, что он направлен влево от касательной, при отрицательном же знаке — он направлен вправо*). Это особенно легко проверить на случае явного задания кривой, ибо тогда [см. (7а)] знак радиуса кривизны совпадает со знаком y_{x^2}'', а последний — как мы знаем [n° **214**] — как раз и определяет, в какую сторону от касательной направлена вогнутость кривой (а с нею — и радиус кривизны).

Примеры. 1) Определить радиус кривизны *циклоиды*: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (черт. 97 на стр. 393).

Так как [n° 210, 5)] $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, то $ds = -\frac{1}{2}dt$; с другой же стороны [n° 201, 2)], $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 2a \sin\frac{t}{2}$, т. е. $ds = 2a\sin\frac{t}{2}dt$. В таком случае для вычисления R можно воспользоваться основной формулой (6):

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2a\sin\frac{t}{2}\,dt}{-\frac{1}{2}dt} = -4a\sin\frac{t}{2}.$$

Если вспомнить выведенное нами в n° 210, 5) выражение для отрезка

*) При этом следует помнить, что положительное направление отсчета дуг отвечает возрастанию параметра (t, x или θ).

нормали n до пересечения с осью x, то окажется, что

$$R = -2n.$$

Отсюда — построение центра кривизны C, ясное из чертежа.

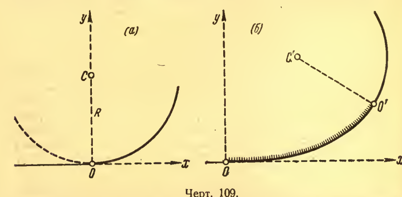
2) В заключение скажем несколько слов об одном практическом вопросе, в котором как раз и используется существенно изменение кривизны вдоль кривой: речь идет о так называемых **переходных кривых**, применяемых при разбивке железнодорожных закруглений.

Как устанавливается в механике, при движении материальной точки по кривой развивается центробежная сила, величина которой определяется формулой

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

где m — масса точки, v — ее скорость, а R — радиус кривизны кривой в рассматриваемой ее точке.

Если бы прямолинейная часть железнодорожного пути непосредственно примыкала к закруглению, разбитому по дуге круга (черт. 109a), то при



Черт. 109.

переходе на это закругление центробежная сила возникала бы мгновенно, создавая резкий и сильный толчок, вредный для подвижного состава и для верхнего строения пути. Для избежания этого прямолинейную часть пути сопрягают с круговой при помощи некоей **переходной кривой** (черт. 109$б$). Вдоль нее радиус кривизны **постепенно** убывает от бесконечного значения — в точке стыка с прямолинейной частью — до величины радиуса круга — в точке стыка с круговой дугой, и соответственно этому **постепенно** нарастает центробежная сила.

В качестве переходной кривой, например, используется кубическая парабола $y = \frac{x^3}{6q}$. В этом случае, очевидно, имеем

$$y' = \frac{x^2}{2q}, \quad y'' = \frac{x}{q},$$

так что для радиуса кривизны получается выражение

$$R = \frac{q}{x}\left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

При $x = 0$ имеем $y' = 0$ и $R = \infty$, и наша кривая в начале координат касается оси x и имеет нулевую кривизну.

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОСНОВНЫХ ИДЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. ПРЕДИСТОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

217. XVII век и анализ бесконечно малых. Это был период, переходный от средневековья к новому времени, начало расцвета капитализма, который в своей борьбе с феодальным строем представлял тогда прогрессивную силу. Точные науки от самой жизни получали мощные импульсы для быстрого развития. Мореплавание вызвало повышенный интерес к астрономии и оптике. Кораблестроение, устройство плотин и каналов, создание различных машин и сооружений, запросы баллистики и вообще военное дело — содействовали развитию механики. В свою очередь астрономия, оптика, механика — да и сама техника непосредственно — требовали решительного обновления тогдашней математики.

Это обновление произошло под знаком введения п е р е м е н н о й в е л и ч и н ы, которое Энгельс справедливо назвал «поворотным пунктом в математике» (см. цитату на стр. 37—38). Лишь математика переменных величин могла обслужить потребности нарождавшегося математического естествознания. Новые задачи привели к созданию новых методов исследования, связанных с рассмотрением «бесконечно малых» величин (или «инфинитезимальных» методов). Отсюда математический анализ, оформившийся к концу века в самостоятельную научную дисциплину, и получил название «анализа бесконечно малых», удержавшееся даже до нашего времени.

Вначале в этой области преобладало «кустарное производство»: установление каждого отдельного факта нуждалось в специальном подходе со стороны исследователя. Но с течением времени положение вещей изменялось. Стали появляться общие методы для решения однотипных задач, устанавливались связи между задачами разных типов, постепенно выяснялись общие понятия, лежащие в основе решения, и все это блестяще завершилось — в руках Ньютона и Лейбница — открытием дифференциального и интегрального исчисления.

Первый параграф посвящен обзору достижений, по меньшей мере двух поколений математиков, которые на протяжении полустолетия подготовили это открытие.

218. Метод неделимых. Начнем с п р е д и с т о р и и и н т е г р а л ь н о г о и с ч и с л е н и я, которая на деле восходит еще к далекой древности; что касается вычисления площадей и объемов, а также определения положения центров тяжести фигур, то здесь истинным учителем математиков XVII века был Архимед (III век до н. э.).

В дошедшем до нас «Послании Архимеда к Эратосфену» *) сообщается о том, что свои результаты — в предварительном порядке — он получал с помощью своеобразного метода, в котором формально использовалась теория равновесия рычага, но в существе лежала *мысль о составлении плоских фигур из линий, а тел — из плоскостей*. Истины, найденные этим «атомистическим» методом, впоследствии публиковались со строгими их доказательствами, по обычаю того времени, от противного. Однако математикам XVII века это «Послание» не было известно — на протяжения двух тысячелетий оно считалось утерянным, и текст его совершенно случайно был обнаружен лишь в начале нашего столетия. Таким образом, в интересующую нас эпоху о методе, которым Архимед пользовался для открытия своих результатов, можно было только догадываться по другим сохранившимся его сочинениям. В них иной раз и следа не оставалось от того пути, на котором результаты фактически были получены. Но в некоторых работах, при самом доказательстве от противного, Архимед все же пользовался разложением плоской фигуры (или тела) на элементы, правда, взятые в конечном числе и конечной толщины; в связи с этим он рассматривал также вписанные и описанные ступенчатые фигуры (тела), которые являются геометрическим прообразом наших интегральных сумм.

Первую попытку раскрыть архимедов метод и расширить область его применения осуществил немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630). Он опубликовал в 1615 г. книгу под названием «Новая стереометрия винных бочек» **). Хотя сочинение это написано по случайному поводу и, казалось бы, на сугубо практическую тему, но оно содержит новый для того времени подход к вопросу о квадратурах и кубатурах: плоская фигура разлагается на бесконечное число бесконечно малых элементов, а затем из тех же элементов — в случае надобности, деформированных — составляется новая фигура с уже известной площадью (и аналогично — для тела).

Отметим, что упомянутые элементы у Кеплера не вовсе лишены толщины: он говорит о «тончайших кружочках», о «частях крайне малой ширины, как бы линейных» и т. п.

Таким путем Кеплер сначала получает прямые выводы для ряда результатов, известных еще Архимеду, а затем — в разделе, названном им «Дополнение к Архимеду» — вычисляет объемы 87 новых тел вращения!

Преемником идей Кеплера и основоположником «метода неделимых», как такового, явился ученый итальянский монах, ученик Галилея — Бонавентура Кавальери (1598—1647), для которого пропаганда этого метода стала делом всей его жизни. В 1635 г. вышел в свет его основной труд «Геометрия, изложенная новым способом неделимых непрерывного», впоследствии (в 1647 г.) дополненный «Шестью геометрическими опытами» ***). В этих работах, по существу, воскресла атомистическая точка зрения Архимеда.

«Для определения размера плоских фигур применяются, говорит Кавальери, прямые линии, параллельные некоторой прямой ..., которые мы воображаем себе проведенными в бесконечном числе в этих фигурах» (черт. 110). Аналогично он поступает и с телами, только там вместо линий проводятся плоскости. Эти линии (плоскости) и суть пресловутые «неделимые»; они «не ограничены числом и лишены какой бы то ни было толщины» (в этом Кавальери противопоставляет себя Кеплеру!). Однако Кавальери не решается

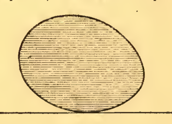
---

*) Имеется в русском переводе: «Новое сочинение Архимеда» (Одесса, Mathesis, 1909).

**) Имеется в русском переводе (ГТТИ, 1935).

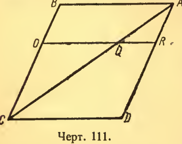
***) Имеется русский перевод двух книг: «Геометрии» и «Опыта IV» (ГТТИ, 1940).

утверждать, что фигуры или тела с о с т о я т из этих неделимых, лишенных толщины. Его основное положение формулируется осторожнее: «Плоские фигуры (или тела) о т н о с я т с я как все их неделимые, взятые вместе». Например, если параллелограмм $ABCD$ (черт. 111) диагональю AC разложить на два треугольника и вообразить в них прямые, параллельные основанию CD, то «все линии (OR) параллелограмма» относятся ко «всем линиям (QR) треугольника» как $2:1$, ибо таково отношение площади параллелограмма к площади треугольника.



Черт. 110.

Под «всеми линиями» фигуры Кавальери понимал, как можно думать, сумму этих линий, т. е. величину бесконечную («неограниченную»), так что лишь о т н о ш е н и е двух подобных сумм могло оказаться конечным. Повидимому (хотя Кавальери нигде не говорит этого явно), неделимые находятся на равных расстояниях друг от друга, но эти расстояния нигде не фигурируют. Если попытаться передать мысль Кавальери в привычных нам терминах, то можно сказать, что он использует сумму ординат (или сумму значений функции), не умножая их на приращении абсциссы (независимой переменной). Так, сформулированное выше утверждение, если за параллелограмм взять для простоты квадрат со стороной a и восстановить умножение на расстояние h между неделимыми, можно (конечно, весьма условно!) проиллюстрировать цепью равенств:



Черт. 111.

$$\frac{\sum OR}{\sum QR}=\frac{\sum a}{\sum x}=\frac{\sum ah}{\sum xh}=\frac{\int\limits_0^a a\,dx}{\int\limits_0^a x\,dx}=2.$$

Важный дальнейший шаг делает Кавальери, устанавливая в «Геометрии» отношение «всех квадратов (линий OR) параллелограмма» ко «всем квадратам (линий QR) треугольника». В результате длинного ряда умозаключений, оно оказывается равным т р е м. В «Опыте IV» он сопоставляет далее «все кубы» и «все квадрато-квадраты» (линий) параллелограмма и треугольника: здесь отношения получаются равными ч е т ы р е м и п я т и. Отсюда Кавальери сделал заключение о справедливости подобного же закона и для случая степени с любым натуральным показателем m. Этот закон можно было бы в наших символах записать так:

$$\frac{\int\limits_0^a a^m\,dx}{\int\limits_0^a x^m\,dx}=m+1,$$

так что, по сути, здесь речь идет о вычислении интеграла

$$\int\limits_0^a x^m\,dx=\frac{1}{m+1}\int\limits_0^a a^m\,dx=\frac{1}{m+1}\,a^{m+1}.$$

Свои результаты Кавальери немедленно же применяет к различным квадратурам и кубатурам, но получает их совершенно независимо от приложений. В этой общности постановки задачи (именно как задачи вычисления определенного интеграла) заключается продвижение вперед по сравнению с Кеплером, выполнявшим всякий раз лишь конкретные кубатуры.

219. Дальнейшее развитие учения о неделимых. Вычислением интеграла $\int_0^a x^m\,dx$ путем сопоставления его с $\int_0^a a^m\,dx = a^{m+1}$ занимались и другие ученые. Французский математик Пьер Ферма (1601—1665), как видно из его переписки, пришел к общему результату Кавальери несколько раньше последнего. Затем должны быть упомянуты Блез Паскаль (1623—1662) — французский математик, физик и философ — с его работой «Сумма числовых степеней» (1654), а также английский ученый Джон Валлис (1616—1703), о книге которого «Арифметика бесконечных величин» (1655) нам уже приходилось говорить. Все они исходили из арифметических соображений и связывали это вычисление с рассмотрением суммы m-ых степеней последовательных натуральных чисел. На привычном нам языке суть дела может быть выражена так: если разложить промежуток $[0, a]$ на n равных частей длины $h = \frac{a}{n}$, то отношение интегральных сумм

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}a\right)^m h}{\sum\limits_{i=1}^{n} a^m h} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^m}{n^{m+1}} \to \frac{1}{m+1} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Предельный переход, впрочем, отчетливо выступает только у Валлиса. В основе всех рассуждений лежит умозаключение по индукции.

В более поздних работах*) Ферма, занимаясь квадратурой различных «парабол»: $y^m = cx^n$ и «гипербол»: $y^m x^n = c$, уже прямо разбивает фигуру под кривой на полоски (как это делаем мы), но настолько малые, чтобы можно было «приравнять» их прямоугольникам. При этом абсциссы у него образуют даже не арифметическую, а геометрическую прогрессию [ср. 184, 2)]. Таким путем Ферма оказался в состоянии вычислять интегралы от степеней x^r с рациональными показателями $r = \pm\frac{n}{m}$ (исключая лишь случай $r = -1$, отвечающий классической гиперболе).

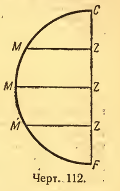
Ближе подошел к современному пониманию определенного интеграла и раскрыл мощь (еще не созданного!) интегрального исчисления — Паскаль. Мы имеем в виду те его сочинения, которые в совокупности дают решение выдвинутого им же в 1658 г. ряда задач, связанных с циклоидой и требующих вычисления различных площадей, объемов, длин дуг и определения положения центров тяжести. Эти работы первоначально были опубликованы им под псевдонимом, как «Различные открытия А. Деттонвилля в геометрии».

Паскаль продолжает пользоваться «языком неделимых», но в обстоятельном «Предуведомлении» тщательно разъясняет, как этот язык

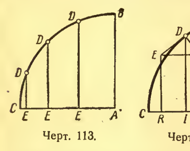
---

*) Отрывки из них можно найти в «Хрестоматии по истории математики» Вилейтнера, вып. IV (ГТТИ, 1932), стр. 70.

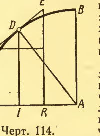
надлежит понимать. Например, если диаметр полукруга (черт. 112) разделен на «неограниченное» число равных частей в точках Z, и проведены ординаты ZM, то под «суммой ординат» разумеется «сумма неограниченного числа прямоугольников, составленных каждой ординатой с каждой из маленьких равных частей диаметра», причем эта сумма «отличается от площади полукруга на величину, меньшую любой данной». На черт. 113 дуга BC круга разделена на «неограниченное» число равных дуг в точках D, из которых опущены перпендикуляры DE, называемые «синусами». В таком случае, если говорят просто сумма синусов DE, то под этим понимают сумму прямоугольников, составленных каждым синусом DE и каждой из выпрямленных маленьких дуг DD, так как эти синусы порождены равными делениями дуги». В приведенных примерах само собою ясно, на части какой линии следует умножать рассматриваемые там ординаты или синусы; в других случаях эта линия должна быть явно упомянута. Таким образом, независимая переменная, которую оставил в тени Кавальери, рассматривавший лишь сумму значений функции, здесь с полной отчетливостью восстанавливается в правах: значения функции умножаются на приращения независимой переменной.



Черт. 112.



Черт. 113.



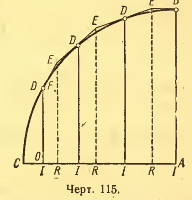
Черт. 114.

Для того чтобы дать образец рассуждения которым пользуется Паскаль для вычисления нужных ему интегралов, приведем одно предложение из «Трактата о синусах четверти круга» *). Прежде всего устанавливается очевидная лемма (см. черт. 114, из которого ясны и обозначения):

$$DI \times EE = RR \times AB. \qquad (1)$$

Само же упомянутое предложение гласит: *сумма синусов дуги BF* (черт. 115) *равна отрезку AO, умноженному на радиус AB.*

Заменяя в (1) каждую касательную EE дугой DD и складывая все равенства этого типа, слева получим нужную нам «сумму синусов», а справа сумму всех RR или — что то же — линию AO, умноженную на AB. Этим и завершается доказательство.



Черт. 115.

За ним следует интересное «Предуведомление», в котором Паскаль предлагает читателю не удивляться тому, «что все расстояния RR вместе равны AO, а также что каждая касатель-

*) Выдержки из него имеются в упоминавшейся уже «Хрестоматии» Вилейтнера, вып. IV, стр. 81.

ная EE равна каждой из маленьких дуг DD, ибо достаточно известно, что хотя это равенство неверно, когда множество синусов конечно, но тем не менее оно верно, когда это множество неограниченно».

Для истолкования доказанного утверждения на нашем языке, положим радиус $AB = 1$ и введем угол $\varphi = \sphericalangle BAD$; тогда оно окажется равносильным равенству

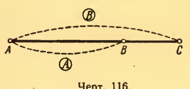
$$\int_0^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi.$$

Очень поучителен и самый подход Паскаля к решению поставленных им задач: он наперед в общем виде точно перечисляет, какого типа интегралы («суммы») для этого оказываются нужными. Затем он показывает, как их вычислить применительно к интересующему его конкретному случаю, и тем завершает решение. Упомянем еще о различных довольно сложных интегральных формулах, преобразующих одни интегралы («суммы») в другие; Паскаль получает их из стереометрических соображений и использует с большим мастерством.

220. Нахождение наибольших и наименьших, проведение касательных. Обратимся к предыстории дифференциального исчисления. В этой области зачинателем следует считать Ферма, который занимался как раз обеими задачами, обычно относимыми к дифференциальному исчислению: разысканием наибольших и наименьших и проведением касательных, и первым применил к их решению методы, имеющие по существу инфинитезимальный характер.

Работа Ферма «Метод исследования наибольших и наименьших» *) стала известна из его писем, начиная с 1629 г., частично была опубликована в 1642—44 гг., а полностью — лишь в 1679 г., уже после смерти Ферма.

Правило, предложенное Ферма (без какого-либо обоснования!) для разыскания наибольших или наименьших значений, мы разъясним на одной из рассмотренных им же задач: *рассечь данную линию AC* (черт. 116) *в точке B так, чтобы тело, построенное на квадрате AB и на линии BC, было наибольшим.*



Черт. 116.

Обозначая данный отрезок AC через B, а искомый AB — через A, для наибольшего объема получим выражение: $A^2(B-A)$ **). Подставив сюда $A+E$ вместо A (буква E у Ферма служит стандартным обозначением для приращения рассматриваемой величины A), приравняем оба выражения (на деле неравные!):

$$(A+E)^2(B-A-E) = A^2(B-A).$$

Опустим теперь в обеих частях общие члены и сократим оставшиеся на содержащийся в них всех множитель E:

$$2A(B-A) - A^2 + E(B-A-E) - 2AE = 0.$$

Наконец, уничтожим здесь те члены, которые и после этого сокращения еще содержат множителем E. В результате получится:

$$2A(B-A) - A^2 = 0 \text{ или } 2AB = 3A^2.$$

*) См. «Хрестоматию» Вилейтнера, вып. IV, стр. 78.

**) Мы здесь и везде дальше пользуемся привычными нам алгебраическими обозначениями, независимо от того, как на деле пишет цитируемый автор.

Это будет уже, по выражению Ферма, «истинное» равенство, в то время как предшествующие равенства были лишь «вымышленными» или «приближенными». Из последнего равенства и определяется $A\left(=\frac{2}{3}B\right)$.

В общем виде, если использовать функциональные обозначения, «правило Ферма» выглядит так. Для разыскания величины A, доставляющей выражению $f(A)$ наибольшее или наименьшее значение, Ферма сначала пишет «приближенные» равенства

$$f(A+E)=f(A) \quad \text{или} \quad f(A+E)-f(A)=0,$$

откуда, деля на E, получает

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0.$$

В последнем равенстве он уничтожает члены, еще содержащие E, т. е. полагает $E=0$ (а это равносильно здесь переходу к пределу при $E\to 0$). Тогда получается, наконец, уже «истинное» равенство

$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0$$

или — в наших обозначениях — $f'(A)=0$, откуда и определяется искомое A [ср. 100 и 112].

Величина E, хотя Ферма этого не говорит, играет роль очень малого (если не бесконечно малого) приращения независимой переменной A. Исходное равенство $f(A+E)=f(A)$ выражает своего рода *принцип остановки*: в тот момент, когда величина достигает своего наибольшего или наименьшего значения, она как бы останавливается в своем изменении *).

В той же работе Ферма указывает, что его методом можно решать и задачу о проведении касательных к кривым. На этот раз через A он обозначает подкасательную, а через E — ее приращение (или убыль); пользуясь уравнением кривой, он составляет сначала «приближенное» равенство, применяет прежнюю процедуру, и в результате получает равенство, из которого определяется A.

К исследованиям Ферма примыкают правила, данные для решения названных задач другими авторами и либо упрощающие правила Ферма, либо расширяющие область их применения. Мы упомянем лишь о методе проведения касательных, который излагает учитель Ньютона — Исаак Барроу (1630—1677) в своих «Лекциях по оптике и геометрии» (1669—1670), указывая, что делает это «по совету друга» (повидимому — Ньютона!)

Черт. 117.

Барроу вводит стандартные обозначения для обеих координат точки M кривой (черт. 117) и для их приращений, полагая $AP=f$, $PM=m$, $NR=e$, $RM=a$, причем считает эти приращения — вместе с дугой

*) Подобный принцип уже формулировался раньше, например, Кеплером.

NM «неограниченно малыми». Связав координаты $f-e$ и $m-a$ точки N уравнением кривой, Барроу отбрасывает в полученном соотношении все члены, вовсе не содержащие ни e, ни a (они на деле взаимно уничтожатся), а также члены степени выше первой относительно e и a («ибо эти члены не будут иметь никакого значения»). Здесь впервые явно выступает *принцип пренебрежения членами высшего порядка малости* (у Ферма его можно лишь подозревать!).

Теперь уже легко определить отношение a к e, или — что то же — отношение ординаты $PM=m$ к подкасательной $TP=t$. Равенство обоих отношений следует из подобия конечного треугольника TPM и бесконечно малого треугольника NRM (в котором вместо «частицы кривой», именно ввиду ее «неограниченной малости», подставляется «частица касательной»).

Эти подобные треугольники с той поры прочно входят в обиход анализа бесконечно малых. Впоследствии Лейбниц назвал их «характеристическими» *).

221. Проведение касательных с помощью кинематических соображений. Французский математик Жиль Персоин де Роберваль (1602—1675) и итальянский физик и математик Эванджелиста Торричелли (1608—1647) независимо друг от друга и примерно одновременно (их исследования впервые были опубликованы в 1644 г.) пришли к мысли использовать для проведения касательных к кривым кинематические соображения. Именно, если кривую удается представить как траекторию движения точки, составленного из двух более простых движений, для которых скорости по величине и направлению непосредственно даны, то направление скорости составного движения — а с ним и направление касательной к траектории — определяется по «правилу параллелограмма».

Черт. 118.

В качестве примера, приведем принадлежащее Торричелли решение задачи о касательной к параболе. Он использует при этом кинематические соображения своего учителя Галилея, которые для краткости мы, отступая от оригинала, изложим на языке аналитической геометрии. Пусть точка в начальный момент времени находится в O (черт. 118) и свободно падает с ускорением g (а значит — со скоростью gt, если через t обозначить время) вдоль вертикальной прямой, которая сама перемещается горизонтально с постоянной скоростью u. Тогда, при обозначениях чертежа, в момент t будем иметь:

$$x=\frac{1}{2}gt^2, \quad y=ut,$$

откуда, исключая t, найдем: $y^2=2\dfrac{u^2}{g}x$. Таким образом, в качестве траектории точки получается парабола (которая, за счет выбора u, может быть отождествлена с произвольной параболой $y^2=2px$). Отношение вертикальной скорости к горизонтальной равно

$$\frac{gt}{u}=\frac{gt^2}{ut}=\frac{2x}{y},$$

*) Впрочем, по его утверждению, идея бесконечно малого «характеристического» треугольника была им заимствована не у Барроу, а у Паскаля [см. n° 219, черт. 114].

откуда — с учетом подобия треугольников — и усматривается, что касательная пересекает ось параболы позади ее вершины на расстоянии x [ср. 210, 2)].

Мы остановились именно на этом примере в связи с тем, что здесь для проведения касательной использовано разложение движения по кривой на составляющие движения по горизонтальному и вертикальному направлениям.

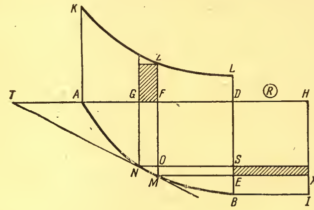
Впоследствии Барроу, обобщая эту идею, стал представлять движение уже по произвольной кривой как бы составленным из двух движений — горизонтального (которое всегда можно считать равномерным) и вертикального. Тогда положение касательной TM (черт. 118) определится отношением отрезков TP и PM, которое равно отношению скорости «опускания» к скорости «бокового движения».

222. Взаимная обратность задач проведения касательной и квадратуры. Исключительный интерес и важность представляют десятая и одиннадцатая из «Лекций по геометрии» Барроу: в них проведение касательных связывается с квадратурами. Из большого числа относящихся сюда предложений мы выделим теоремы XI из лекции X и XIX из лекции XI, в которых впервые в предистории анализа бесконечно малых прямо противопоставляются две основные задачи дифференциального и интегрального исчисления в геометрической форме, именно — проведение касательной к кривой и квадратура кривой*). Переведя эти теоремы на аналитический язык, в привычных нам обозначениях содержание их можно сформулировать так:

I. Если $y = \int\limits_0^x z\,dx$, то $\dfrac{dy}{dx} = z$.

II. Если $z = \dfrac{dy}{dx}$, то $\int\limits_0^x z\,dx = y$ (подразумевается, что $y = 0$ при $x = 0$).

Чтобы дать представление о том, что же на самом деле сделано у Барроу, изложим вкратце формулировку и доказательство второй из этих теорем.



Черт. 119.

Дана произвольная кривая AB (черт. 119). *Пусть MT — касательная к ней в точке M. Вторую кривую KL определим условием*: $FZ : R =$

*) См. «Хрестоматию» Вилейтнера, вып. IV, стр. 89.

$= FM:TF$, *где* R — *данный отрезок* ($= DH$). *Тогда площадь* $ADLK$ *равна произведению* $DB \times R$.

Для доказательства, возьмем на кривой AB «неограниченно малый отрезок MN» и проведем указанные на чертеже линии. Тогда (как мы уже знаем)

$$MO:NO = FM:TF = FZ:R,$$

откуда

$$NO \times FZ = MO \times R \quad \text{или} \quad GF \times FZ = ES \times EX.$$

«Но так как все прямоугольники $GF \times FZ$ отличаются от площади $ADLK$ сколь угодно мало, и все соответствующие прямоугольники $ES \times EX$ образуют прямоугольник $DHIB$, то утверждение является достаточно ясным».

Если положить $AF = x$, $FM = y$, $FZ = z$ и $R = 1$, то по условию, определяющему вторую кривую, как раз и будет

$$\frac{z}{1} = \frac{FM}{TF} = \frac{dy}{dx},$$

а заключение теоремы равносильно тому, что

$$\int_0^x z\,dx = y \times 1 = y.$$

Тщетно, однако, было бы искать у Барроу даже простого сопоставления этих двух теорем (в книге они отделены двумя десятками других); к тому же они почти не используются. Здесь именно и сказалось то обстоятельство, что Барроу говорит на геометрическом языке, не владея теми общими понятиями, которые одни только и могли бы осветить существо вопроса и открыть дорогу широким приложениям.

223. Обзор предыдущего. Подведем же итоги тому, что было достигнуто в XVII веке в направлении «анализа бесконечно малых» — до появления на математическом поприще Ньютона и Лейбница.

Всего больше было сделано в области, связываемой теперь с интегральным исчислением. Здесь не только было получено большое количество конкретных результатов, относящихся к квадратурам, кубатурам, спрямлениям дуг, компланациям поверхностей и определению центров тяжести, но и была осознана связь между всеми подобными задачами, которые традиционно приводились к простейшей из них — к квадратуре. В работах Кавальери, Паскаля и других начало выкристаллизовываться самое понятие определенного интеграла. Был вычислен фактически ряд простейших интегралов, чаще всего в геометрической форме, но иногда и чисто арифметически (Ферма, Паскаль, Валлис); найдены были различные соотношения, преобразующие одни интегралы в другие (Ферма, Паскаль, Барроу).

В области, относимой теперь к дифференциальному исчислению, Ферма дал единообразный метод инфинитезимального характера для решения задач на разыскание наибольших или наименьших и на построение касательных. Его исследования были продолжены рядом других авторов. Однако здесь не удалось выделить основных понятий, лежащих в существе вопроса. Особняком стоят попытки Роберваля и Торричелли, продолженные Барроу, решить задачу проведения касательной к кривой, исходя из кинематических соображений (это впоследствии нашло отражение в концепциях Ньютона).

Наконец, как мы только что видели, Барроу удалось частично перебросить мост от задач одной группы к задачам другой.

Таким образом, почва для нового исчисления была подготовлена, но исчисления как такового все еще не было. А между тем, как

впоследствии ярко выразился Лейбниц, «после таких успехов науки недоставало только одного — нити Ариадны в лабиринте задач, именно аналитического исчисления по образцу алгебры». Здесь, прежде всего, нужно было установить в общей форме основные понятия нового исчисления и их взаимосвязь. Затем — введя подходящую символику — надлежало создать регулярный процесс, или алгорифм, для вычисления. Это и было выполнено Ньютоном и Лейбницем, независимо друг от друга *) и притом по-разному.

Обзору их работ, относящихся к анализу бесконечно малых, мы предпошлем еще следующее замечание о самом понятии «бесконечно малой». В ту пору — да и в течение еще долгого времени — под бесконечно или неограниченно малой понимали, часто, не говоря этого явно, так сказать, статическую, т. е. неизменяющуюся величину, не равную нулю и в то же время (абсолютно) меньшую всякой конечной величины. Это понятие «актуально» бесконечно малой — при нашей концепции числа и пространства — противоречиво и носит мистический характер. Ему противопоставляется — привычное нам теперь — понятие «потенциально» бесконечно малой как переменной величины, которая лишь в процессе своего изменения становится (абсолютно) меньшей любой конечной величины. Переход от одного понимания бесконечно малой к другому встретился с большими трудностями, ибо требовал ясного представления о предельном процессе. Борьбу этих двух концепций читатель увидит и в трудах Ньютона и Лейбница, к рассмотрению которых мы переходим.

§ 2. ИСААК НЬЮТОН (1642—1727)

224. Исчисление флюксий. Основной работой Ньютона, где излагается это исчисление, является трактат: «Метод флюксий и бесконечных рядов» **). Он был составлен около 1671 г. (основные идеи его оформились, вероятно, еще раньше), но вышел в свет лишь в 1736 г. — уже после смерти автора. Переменные величины Ньютон называет «флюэнтами» (т. е. «текущими» величинами) и обозначает последними буквами латинского алфавита: u, y, z, x; они рассматриваются как растущие (убывающие) во времени. Скорости же, с которыми они возрастают, называются их «флюксиями» и обозначаются теми же буквами, но с точками: $\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{x}$. Таким образом, для Ньютона скорость есть понятие непосредственно ясное, не нуждающееся в определении, а через него уже определяется флюксия, т. е. — как сказали бы мы — производная от флюэнты по времени ***).

Правда, Ньютон оговаривает, что время здесь понимается не буквально — за «время» может быть принята любая величина, скажем, x, равномерно растущая вместе с настоящим временем, например, такая, что $\dot{x} = 1$. Но следует помнить, что все флюэнты зависят от этого «времени», т. е. от одной и той же универсальной независимой переменной. Таким образом, ни функций от нескольких независимых переменных, ни частных производных у Ньютона нет.

Первую основную проблему Ньютон затем формулирует так:

---

*) Мы совершенно оставляем в стороне необоснованный спор о приоритете открытия нового исчисления, который возник впоследствии.

**) Имеется русский перевод; см. «Математические работы Ньютона» (ОНТИ, 1937), стр. 25—166.

***) Хотя символикой Ньютона сейчас не пользуются, но в механике и физике до сих пор сохранилось обыкновение именно производные по времени обозначать точками.

«По данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюксиями».

Эта проблема более обща, чем просто вычисление флюксии от заданной флюэнты. Но решает ее Ньютон непосредственно лишь для алгебраических уравнений. Для примера он берет уравнение

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \tag{1}$$

Предлагаемое Ньютоном правило сводится к следующему: каждый член, содержащий степень x, умножается на показатель степени x, и один из множителей x заменяется на $\dot{x}$; аналогично, каждый член, содержащий степень y, умножается на показатель степени y, и один из множителей y заменяется на $\dot{y}$; сумма всех найденных таким образом членов приравнивается нулю. В данном примере получится

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Легко понять, как переносится это правило на общий случай алгебраического уравнения, связывающего любое число флюэнт. При наличии дробей или радикалов Ньютон прибегает к обходному пути. Пусть дано уравнение

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay+x^2} = 0.$$

Полагая

$$\frac{by^3}{a+y} = z \quad \text{и} \quad x^2\sqrt{ay+x^2} = u,$$

Ньютон сводит его к уравнению

$$x^3 - ay^2 + z - u = 0,$$

к которому применимо указанное правило:

$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0.$$

Что же касается $\dot{z}$, $\dot{u}$, то они, в свою очередь, определяются из соотношений, получающихся, если применить то же правило к уравнениям:

$$az + yz - by^3 = 0, \quad ax^4y + x^6 - u^2 = 0.$$

Переходя к доказательству правила, Ньютон вводит новое понятие: «моменты» текущих величин. Это — «те неограниченно малые их части, благодаря прибавлению которых в неограниченно малые части времени беспрерывно увеличиваются сами величины». Эти моменты пропорциональны скоростям, с которыми величины изменяются, т. е. флюксиям. Вводя неограниченно малую величину o (это не нуль, а «актуально» бесконечно малое приращение времени), Ньютон записывает моменты величин так: $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, $\dot{x}o$ (лейбницевские дифференциалы!).

Самое доказательство Ньютон проводит на уже рассмотренном примере, в основном повторяя процедуру Ферма. Подставив в равенство (1) $x + \dot{x}o$ вместо x и $y + \dot{y}o$ вместо y, он почленно вычитает (1), сокращает на o и, наконец, пренебрегает теми членами, которые и после этого еще содержат o: «так как — поясняет Ньютон — мы предположили o бесконечно малой величиной, ..., то члены, которые на нее умножены, можно считать за ничто в сравнении с другими». Ни этот принцип, ни само правило формально не новы, но существенно новым является то, что результат здесь утверждается для флюэнт любой природы, безотносительно к каким-либо частным задачам.

Впоследствии Ньютон ввел и флюксию от флюксии, т. е. вторую флюксию: $\ddot{u}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{x}$, и даже флюксии высших порядков.

Свое исчисление флюксий Ньютон применяет сначала к задачам, о которых уже не раз была речь выше.

«Определить наибольшие и наименьшие значения величин».

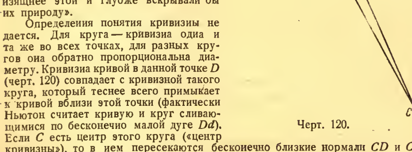
Сначала формулируется *принцип остановки*: «когда величина есть наибольшая или наименьшая из всех возможных, то она в этот момент не течет ни вперед, ни назад». Отсюда правило: найти флюксию и приравнять ее нулю. При этом, как подчеркивает Ньютон, с о о т н о ш е н и е, о п р е д е л я ю щ е е ф л ю э н т у, м о ж е т с о д е р ж а т ь и и р р а ц и о н а л ь н о с т и, ч е г о н е д о п у с к а л и р а н е е о п у б л и к о в а н н ы е п р а в и л а.

«Провести касательные к кривым».

В основном случае, когда непосредственно дано уравнение между декартовыми координатами x, y переменной точки кривой, Ньютон рассуждает подобно Барроу [n°**221**], лишь бесконечно малые приращения (убыли) e и a он заменяет моментами $\dot{x}\cdot o$ и $\dot{y}\cdot o$, так что (сохраняя обозначения черт. 117)

$$PM:TP=\dot{y}:\dot{x};$$

отношение же флюксий определяется по указанному правилу из уравнения кривой. Ньютон рассматривает и ряд других способов проведения касательной, отвечающих другим способам задания кривой.



Черт. 120.

Совершенно новой по постановке является задача:

«Определить величину кривизны какой-либо данной кривой в данной точке».

Сформулировав ее, Ньютон присовокупляет: «Существует мало задач в учении о кривых, которые были бы изящнее этой и глубже вскрывали бы их природу».

Определения понятия кривизны не дается. Для круга — кривизна одна и та же во всех точках, для разных кругов она обратно пропорциональна диаметру. Кривизна кривой в данной точке D (черт. 120) совпадает с кривизной такого круга, который теснее всего примыкает к кривой вблизи этой точки (фактически Ньютон считает кривую и круг сливающимися по бесконечно малой дуге Dd). Если C есть центр этого круга («центр кривизны»), то в нем пересекаются бесконечно близкие нормали CD и Cd к кривой. Для радиуса круга («радиуса кривизны») Ньютон выводит формулу, которая лишь формой записи разнится от привычной нам.

225. Исчисление, обратное исчислению флюксий; квадратуры. После первой основной проблемы Ньютон в «Методе флюксий» формулирует и обратную ей вторую проблему:

«По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами».

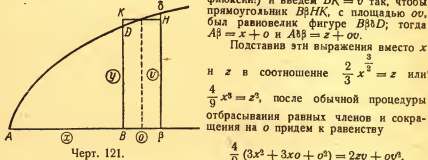
В таком виде это есть (как мы сказали бы теперь) задача об интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения, гораздо более общая и трудная, чем непосредственное нахождение флюэнты по ее флюксии, т. е. разыскание первообразной. Мы не будем касаться здесь упомянутой общей задачи (ее Ньютон решает преимущественно с помощью бесконечных рядов)

и остановимся лишь на задаче разыскания первообразной, которую Ньютон всегда трактует геометрически — как задачу квадратуры кривой.

В основе лежит фундаментальное предложение о том, что (если воспользоваться привычной нам терминологией) производная от переменной площади по абсциссе есть ордината, так что сама площадь для ординаты и служит первообразной [ср. 156].

Представляет интерес то доказательство этого предложения, которое Ньютон дал в своей более ранней работе *), еще до оформления метода флюксий. Желая установить, что для кривой $y = ax^{\frac{m}{n}}$ площадь z (отсчитываемая от точки, где $y = 0$) выразится формулой $z = \frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, Ньютон идет обратным путем и из выражения для площади получает выражение для ординаты. Начинает он с частного случая: если $z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, то $y = x^{\frac{1}{2}}$; воспроизведем относящиеся сюда рассуждения, имеющие совершенно общий характер.

Итак, пусть (черт. 121) $AB = x$, $BD = y$ и пл. $ADB = z$. Положим $B\beta = o$ (здесь o не означает еще приращения времени, как в теории флюксий!) и введем $BK = v$ так, чтобы прямоугольник $B\beta HK$, с площадью ov, был равновелик фигуре $B\beta\delta D$; тогда $A\beta = x + o$ и $A\delta\beta = z + ov$.



Черт. 121.

Подставив эти выражения вместо x и z в соотношение $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$ или $\frac{4}{9} x^3 = z^2$, после обычной процедуры отбрасывания равных членов и сокращения на o придем к равенству

$$\frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + ov^2.$$

«Если теперь — продолжает Ньютон — предположить, что $B\beta$ бесконечно убывает и исчезает или что o является нулем, то v и y делаются равными, и члены с множителем o исчезают». Отсюда уже легко получается и требуемый результат: $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Так как v, собственно, и есть отношение приращения площади ($= ov$) к приращению абсциссы ($= o$), и утверждение, что v делается равной ординате при бесконечном убывании o, не связано с рассматриваемой частной задачей, то по существу это и есть доказательство [ср. 156] сформулированного выше предложения. Отметим, что $o = B\beta$ здесь скорее является бесконечно малой в нашем смысле, и чувствуется определенный намек на предельный переход!

Иначе поступает Ньютон в «Методе флюксий». Наряду с переменной криволинейной фигурой ADB, он рассматривает и переменный прямоуголь-

*) «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов»; см. «Математические работы Ньютона», стр. 3—24. Это сочинение было написано еще в 1666—1667 гг., но напечатано лишь в 1711 г.

ник $ACEB$ с высотой $AC = 1$ (черт. 122). Обе площади «порождаются» движением, соответственно, прямых BD и BE. «Тогда приращения этих площадей*) и их флюксии будут всегда в том же отношении, что и описывающие их линии». При прежних обозначениях (с учетом того, что площадь прямоугольника есть x) будем иметь

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{y}{1} \quad \text{или} \quad \dot{z} = y\dot{x}.$$

В предположении же, что $\dot{x} = 1$, получим просто: $\dot{z} = y$. Обоими этими результатами Ньютон постоянно пользуется.

Черт. 122.

Теперь легко решается задача:

«Найти сколько угодно кривых, площади которых представляются с помощью конечного уравнения».

Именно, задавшись наперед произвольным уравнением между x и z, нужно найти из него уравнение между x и $\dot{z} = y$; таким путем и получается кривая, площадь которой имеет заранее известное выражение через абсциссу (или, вообще, связана с ней известным уравнением).

Вслед за этим Ньютон ставит задачу:

«Найти сколько угодно кривых, площади которых связаны с площадью какой-либо данной кривой конечным уравнением».

Коротко говоря, здесь один интеграл приводится к другому с помощью подстановки, но операция производится — как и только что — в обратном порядке: ищется функция, интеграл которой с помощью наперед заданной подстановки мог бы быть выражен наперед заданным уравнением через данный интеграл.

Пользуясь этими двумя приемами, Ньютон составил обширные «каталоги» кривых, квадратура которых либо выполняется непосредственно, либо же — с помощью указываемых подстановок — приводится к квадратуре эллипса или гиперболы («площади которых можно считать некоторым образом известными»). Приведение к квадратуре конических сечений фактически означало использование простейших трансцендентных функций — логарифмической и обратных круговых, которые в то время еще не были введены в анализ.

Специально вычислению квадратур посвящена другая работа Ньютона: «Рассуждение о квадратуре кривых», написанная вскоре после «Метода флюксий» и вышедшая в свет в 1704 г.**). Там рассматриваются выражения и более сложного вида, например,

$$z^{\theta}(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \ldots)^{\lambda} \quad (a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + \ldots),$$

где θ, λ, η — рациональные показатели. Как частный случай отметим нахождение биномиальных интегралов, т. е. разыскание первообразных для выражений вида

$$z^{\theta}(e + fz^{\eta})^{\lambda}.$$

Впрочем, более подробно Ньютон об этом говорит в одном из писем, предназначенных для Лейбница (1676): он знает, что квадратура выполняется алгебраически, если $\frac{\theta + 1}{\eta}$ есть целое (положительное) число или $\frac{\theta + 1}{\eta} + \lambda$ оказывается целым (отрицательным) числом [ср. n° **169**].

*) На этот раз, видимо, «актуально» бесконечно малые.

**) См. «Математические работы Ньютона», стр. 167—193. Введение и другие части «Рассуждения» носят следы позднейшей обработки.

Что касается приложений исчисления квадратур, то в «Методе флюксий» Ньютон отчетливо подчеркивает, что таблицами площадей кривых можно воспользоваться для определения и величин другого рода по заданным их флюксиям. Примером может служить задача:

«*Определить длины кривых*».

Вопрос сводится к определению дуги $t = QR$ (черт. 123) по ее флюксии $\dot{t} = \sqrt{\dot{z}^2 + \dot{y}^2}$ [ср. п° 202, (5)], где $z = MN$ и $y = NR$ суть абсцисса и ордината переменной точки R кривой y. Сама же формула для $\dot{t}$ непосредственно вытекает из рассмотрения прямоугольного $\triangle RSr$, сторонами которого служат «моменты» величин z, y, t.

Черт. 123.

226. Ньютоновы «Начала» и зарождение теории пределов. Произведением, которое больше всех других доставило Ньютону славу, были вышедшие в 1686—1687 гг. «Математические начала натуральной философии» *). В нем заложены основы всей механики вообще и небесной механики — в особенности.

Ньютон говорит в одном письме, что он нашел важнейшие предложения своих «Начал» методом флюксий. Однако на самом изложении это обстоятельство никак не отразилось: обычно приводятся — по примеру древних — лишь доказательства предложений в синтетически геометрической форме.

Но вместе с тем «Начала» содержат и нечто существенно новое и важное в методологическом отношении. Первый же отдел первой книги («О движении тел») Ньютон посвящает своеобразной т е о р и и п р е д е л о в, под названием «Метода первых и последних отношений».

«Первыми отношениями» или «последними отношениями» двух величин называются их п р е д е л ь н ы е отношения. Первым термином Ньютон пользуется для обозначения предела отношения двух «зарождающихся» (бесконечно малых) величин, а второй он применяет безразлично как к отношению «исчезающих» (бесконечно малых) величин, так и к отношению величин конечных или даже бесконечно больших. Говорит Ньютон также о «первой сумме зарождающихся» или «последней сумме исчезающих» величин. Важно подчеркнуть, что все эти понятия н е о п р е д е л я ю т с я, и их содержание выясняется лишь из самого способа их применения. Своеобразие терминологии Ньютона связано с представлением о д о с т и ж е н и и п е р е м е н н о й с в о е г о п р е д е л а, который является, таким образом, для нее «последним» («первым») значением.

Вся ньютонова теория пределов состоит из одиннадцати лемм геометрического содержания. Как Ньютон указывает в следующем за ними «Поучении», они приводятся в целях сокращения доказательств. Того же можно было бы достигнуть и при помощи метода неделимых, но последний представляется «менее геометричным». «Поэтому, — продолжает он, — если во всем последующем изложении я и рассматриваю какие-либо величины как бы состоящими из постоянных частиц, ... то следует разуметь, что это не неделимые, а исчезающие делимые величины, что это не суммы и не отношения конечных частей, а последние суммы и последние отношения исчезающих величин...». И далее: «если в последующем для простоты речи я буду говорить о величинах весьма малых или исчезающих или зарождающихся, то

*) Есть русский перевод акад. А. Н. Крылова (1915—1916), воспроизведенный также и в т. VII «Собрания сочинений акад. А. Н. Крылова» (1936).

не следует под этим разуметь количеств определенной величины, но надо их рассматривать как уменьшающиеся беспредельно». Таким образом, здесь провозглашается принципиально близкая к современной точка зрения: взамен «актуально» бесконечно малых вводятся в рассмотрение «потенциально» бесконечно малые и пределы их сумм и отношений!

227. **Вопросы обоснования у Ньютона.** Мы видим, что позиция Ньютона в вопросах обоснования его исчисления — уже на протяжении двадцати лет — претерпела значительную эволюцию.

В «Методе флюксий», отражающем его старые взгляды, «моменты» величин явно суть «актуально» бесконечно малые, рост величины сводится к последовательному их прибавлению. Свободно используется *принцип пренебрежения бесконечно малыми величинами* по сравнению с конечными.

В «Началах» Ньютон уже отмежевывается от точки зрения неделимых. Во введении к «Квадратуре кривых», написанном позже, он говорит: «Я здесь рассматриваю математические величины не как состоящие из мельчайших частиц, но как описанные непрерывным движением». Из одного замечания во втором издании «Начал» (1713) явствует, что именно «в способе образования величин» Ньютон усматривает главное отличие своего метода от метода Лейбница. Теория пределов, которую — хотя и в зачаточной форме — мы находим в «Началах», представляет существенное продвижение в вопросе обоснования нового анализа. Впоследствии, в упомянутом уже введении к «Квадратуре кривых», Ньютон и самый вывод флюксии от x^n связывает с рассмотрением «последнего отношения» двух исчезающих величин, т. е. по существу — с предельным переходом.

Однако Ньютон все же не выдерживает этой точки зрения до конца. Не далее, как во второй книге «Начал», он снова вводит неясное понятие «моментов» величин, т. е. их «мгновенных приращений или уменьшений»!

Относительно этих «моментов» устанавливается ряд простых утверждений (к тому времени, нужно сказать, в эквивалентной форме, уже опубликованных Лейбницем!). Вот, например, одно из них: *если моменты величины A, B суть a, b, то момент произведения AB есть $Ab+Ba$.* Любопытно, что при доказательстве его Ньютон не исходит из естественно возникающего равенства

$$(A+a)(B+b)-AB=Ab+Ba+ab,$$

ибо тогда ему пришлось бы пренебречь членом ab по сравнению с другими (что как раз и делает Лейбниц!), но прибегает к уловке, а именно, пользуется равенством

$$\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}b\right)-\left(A-\frac{1}{2}a\right)\left(B-\frac{1}{2}b\right)=Ab+Ba,$$

которое, правда, сразу приводит к нужному результату, но вовсе не вытекает из существа дела.

Таким образом, попытка Ньютона своим «Методом первых и последних отношений» подвести рациональный фундамент под новое исчисление не была последовательной. Она получила дальнейшее развитие и завершение лишь более чем через столетие — уже в трудах математиков начала XIX века [n°233].

§ 3. ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНИЦ (1646—1716)

228. **Начальные шаги в создании нового исчисления.** В отличие от Ньютона, после Лейбница осталось огромное рукописное наследство — и притом с датами, позволяющими восстановить порядок развития его идей. В одной из рукописей, помеченных 1675 г., впервые встречается знак $\int$: «Удобно будет, говорит Лейбниц, писать $\int$ вместо *все*, $\int l$ вместо *все l*,

т. е. вместо *суммы l»* (l здесь означает линию). Вскоре появляется и знак *разности* d, устаиавливаются простейшие формулы, относящиеся к этим символам. Лишь постепенно Лейбниц начниает писать dx или dy под знаком $\int$!

В течеиие 1676—1677 гг. Ньютон и Лейбниц (через посредство третьего лица) дважды обменивались письмами. Ньютои в них излагает свои результаты по разложению в бесконечные ряды и квадратурам. Упомянув о подготовленном им трактате (по-видимому, имелся в виду «Метод флюксий»), Ньютон сообщает, что обладает методом, с помощью которого не только решаются задачи на касательные или на наибольшие и наименьшие величины, но и облегчается разыскание квадратур; одиако самый метод он скрыл. Лейбниц немедленно ответил на это изложением своего метода, ограиичиваясь, правда, лишь дифференциальным исчислением. Он пишет:

«Отрезок TB_1 (черт. 124) относится к ординате B_1C_1 *) как C_1D (разность двух абсцисс AB_1, AB_2) относится к DC_2 (разиости двух ординат)... Отсюда явствует, что нахождение касательных есть не что иное, как нахождение разностей ординат, если угодно разности абсцисс положить равными между собой. Поэтому, если называть в последующем через dy разность двух ближайших y н через dx разность двух ближайших x, очевидно, что $d(y^2)$ есть $2y\,dy$, $d(y^3)$ есть $3y^2\,dy$ и т. д.» Например,

$$dy^2 = (y+dy)^2 - y^2$$

Черт. 124.

или, если опустить взаимно уничтожающиеся велнчины, а также квадрат $(dy)^2$ — «по основаниям, известиым из метода наибольших и иаименьших» **), то будет $d(y^2) = 2y\,dy$.

Далее, Лейбниц приводит формулы дифференцирования произведеиия и корня (рассматривая кореиь как степень), дифференцирует и более сложиые радикальные выражения, подчеркивая, что «весьма удивительным н чрезвычайно удобным образом оказывается, что dy и dx всегда находятся вне иррациональной связи».

229. Первая печатиая работа по дифференциальиому исчислеиию. Лишь в 1684 г. был опубликован первый мемуар Лейбница под длинным иазванием: «Новый метод наибольших и иаименьших, а также касательиых, для которого ие служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления» ***).

Здесь Лейбниц первоначальио пытается избежать бесконечно малых и по отношению к «разностям» (differentia) или «дифференциалам» (quantitas differentialis) переменных величин становится на другую точку зреиия, по сравнению с цитированиым выше письмом его к Ньютону. Пусть (черт. 125) YY будет произвольная кривая, Y — переменная точка на ней с абсциссой $AX = x$ и ординатой $YX = y$. Через dx Лейбниц обозначает попросту произвольно взятый отрезок. Если YD есть касательная к кривой

*) Здесь и впредь следует иметь в виду, что Лейбниц обычно откладывает абсциссы по вертикали, а ординаты — по горизонтали.

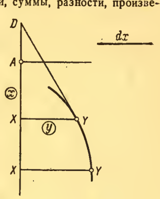
**) Намек на Ферма и других, решавших задачу разыскания наибольшнх и иаименьших.

***) На русском языке имеются в переводе «Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница» (Успехи математнческих иаук, т. III, в. 1, 1948; стр. 166—173).

в точке Y, то отрезок, относящийся к dx так, как ордината y относится к (подкасательной) XD, называется dy.

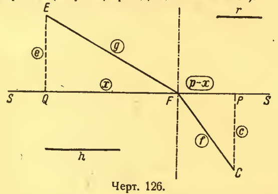
Таким образом, в отличие от Ньютона, для которого первоначальным понятием была скорость, у Лейбница здесь первоначальным понятием оказывается касательная!

Затем Лейбниц сообщает — без всякого вывода — «правила исчисления», относящиеся к дифференцированию постоянной, суммы, разности, произведения, частного, степени, корня *). «Если зиать, так сказать, алгорифм этого исчисления, которое я называю дифференциальным, то... можно будет находить наибольшие и наименьшие, а также касательные, не испытывая притом необходимости в устранении дробей или иррациональностей..., как это приходилось, однако, делать, пользуясь доныне обнародованными методами». Что же касается д о к а з а т е л ь с т в а всего этого, то для него нужно принять во внимание, что dx, dy, ... можно считать соответствеино пропорциональными «мгновениым приращениям или умеиьшениям x, y, ...». Таким образом, в конечном счете дело все же сводится к рассмотрению бесконечно малых, как и в упомянутом выше письме к Ньютону!



Черт. 125.

Лейбниц указывает, что наибольшая или иаименьшая ордината определяется условием, что касательная не наклонеиа ни в одну, ни в другую сторону, т. е. тем, что $dy = 0$; в этот момент ординаты «нн возрастают, ни убывают, но находятся в покое». Он отличает наибольшее значение от наименьшего по тому, направлена ли кривая к оси своей вогнутостью или выпуклостью, а об этом судит по знаку $d\,dy$. Наконец, он исследует и точки перегиба (допуская, правда, здесь неточности).



Черт. 126.

В заключение Лейбниц решает своим методом ряд задач, в том числе знаменитую задачу, которой занималась Ферма н другие ученые XVII века: *каков должен быть путь света от точки C в одной среде до точки E в другой среде* (черт. 126), *чтобы он был пройден в кратчайшее время?*

*) В некоторых из них встречаются двойные знаки в связи с тем, что подкасательная не снабжается знаком.

Лейбниц вводит «плотности» h и r рассматриваемых сред (в смысле «сопротивления, которое испытывают в них лучи света») и ищет на прямой SS, изображающей плоскость раздела, такую точку F, чтобы путь CFE «был наиболее легким из всех возможных», т. е. чтобы величина

$$w = CF \cdot h + FE \cdot r$$

была наименьшей. При обозначениях чертежа

$$w = hf + rg = h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}.$$

Искомое x определяется из условия $dw = 0$ или

$$\frac{h(p-x)}{f} = \frac{rx}{g},$$

что можно переписать и так:

$$\frac{p-x}{f} : \frac{x}{g} = r : h.$$

Легко усмотреть, что этим выражен известный закон физики: *синусы углов падения и преломления обратно пропорциональны* *о п т и ч е с к и м* *плотностям обеих сред.* «Другие ученейшие мужи, — заключает Лейбниц, — вынуждены были сложными путями добиваться того, что опытный в этом исчислении человек выполнит в трех строках».

230. Первая печатная работа по интегральному исчислению. В 1686 г. Лейбниц опубликовал мемуар «О глубокой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных» *), где впервые встречается знак $\int$ (на этот раз — в виде строчной буквы s).

Сначала речь идет об одной теореме Барроу. Если через y, x и p обозначить абсциссу, ординату и поднормаль, то $p\,dy = x\,dx$ (это легко получить, использовав бесконечно малый «характеристический» треугольник с катетами dy и dx). «Если обратить это разностное (дифференциальное) уравнение в суммирующее, то будет $\int p\,dy = \int x\,dx$. Но из того, что я изложил в моем методе касательных, явствует, что $d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\,dx$; следовательно, и обратно, $\frac{1}{2}x^2 = \int x\,dx$ (ибо у нас суммы и разности или $\int$ и d — взаимно обратны, как в обычном исчислении степени и корни)». Отсюда $\int p\,dy = \frac{1}{2}x^2$, что и составляет содержание теоремы Барроу.

Лейбниц подчеркивает, что его исчисление позволяет выражать с помощью уравнений также и «трансцендентные», т. е. неалгебраические линии, например, *ц и к л о и д у*. Мы изложим соответствующее место мемуара, пополнив его темн разъяснениями, которые сам Лейбниц дает по этому поводу в своих письмах. На черт. 127 изображены полукруг и половина дуги циклоиды; пусть радиус круга равен единице, $AB = x$, $BE = v$, $BC = y$, $\smile AE = a$, $GD = dx$, $DL = dv$. Тогда, по известной теореме геометрии, $v = \sqrt{2x - x^2}$, так что

$$dv = \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx, \quad GL = \sqrt{(dx)^2 + (dv)^2} = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}, \quad a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

*) См. «Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница», стр. 175—177.

Так как, по самому происхождению циклоиды, $EC = a$ и $y = a + v$, то

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

«Это уравнение в совершенстве выражает соотношение между ординатой y и абсциссой x, и из него могут быть выведены все свойства циклоиды». (Например, путем дифференцирования отсюда легко получить известное построение касательной или нормали к циклоиде). Таким образом, интегрирование служит для Лейбница средством для построения трансцендентных функций, которых он иначе ни записать, ни исследовать не умеет.

В конце мемуара Лейбниц делает важное предупреждение о том, что не следует под знаком $\int$ пренебрегать множителем dx, ибо это преградило бы путь к преобразованию одной фигуры в другую. Ясно, что здесь имеется в виду преобразование переменной, позволяющее одну квадратуру свести к другой, а осуществление этого, действительно, упрощается наличием множителя dx.

Черт. 127.

Итак, в интегральном исчислении для Лейбница основным понятием была **сумма** «актуально» бесконечно малых прямоугольников $y\,dx$ (которую он позже, по примеру братьев Бернулли, стал называть **интегралом**); Ньютон же, как мы видели, в основу положил понятие первообразной. Для приложений точка зрения Лейбница была удобнее, хотя самое вычисление интеграла и он сводит к нахождению первообразной.

231. Дальнейшие работы Лейбница. Создание школы. Содержание нескольких десятков статей и заметок Лейбница, а также его переписки с выдающимися математиками его времени — очень разнообразно. Оно охватывает, прежде всего, дальнейшее развитие созданного им исчисления. Некоторые из относящихся сюда вопросов мы уже упоминали по ходу изложения самого анализа в предыдущих главах: дифференцирование степенно-показательных выражений [n° **85**, (5)], формулу для дифференциалов высших порядков от произведения [n° **98**], разложение рациональных дробей, для облегчения их интегрирования, на простые дроби [n° **166**]. Другие работы Лейбница связаны с разложением функций в бесконечные ряды или принадлежат более высоким областям анализа [мы встретимся с ними во втором томе]. Наряду с построением аппарата анализа, Лейбниц занимался и его приложениями, особенно в области «дифференциальной» геометрии. Он часто ставит своим современникам различные прикладные задачи и, в свою очередь, решает задачи, поставленные другими.

Особо важное значение имел тот факт, что у **Лейбница появилась школа**, главными представителями которой были братья **Бернулли**, Якоб (1654—1705) и Иоганн (1667—1748), а также Гильом Франсуа **де Лопиталь** (1661—1704), автор первого учебника дифференциального исчисления. Созданию школы содействовали научный энтузиазм

Лейбница, непрерывная публикация выходящих из-под его пера работ и его деятельная научная переписка.

Нельзя недооценить и роли введенных им удобных обозначений, **весьма приспособленных к геометрическим и механическим исследованиям** (недаром же именно лейбницевские обозначения в основном сохранились и до нашего времени!). Целесообразная символика, несомненно, облегчила создание настоящего алгорифма, о котором он мечтал с самого начала. Этот алгорифм постепенно стал общим достоянием.

232. Вопросы обоснования у Лейбница *). В этом направлении Лейбниц испытывал серьезнейшие затруднения, до конца жизни не прекращая поисков путей для обоснования своего исчисления.

«Актуально» бесконечно малые составляют основу как дифференциального, так и интегрального исчисления. По отношению к первому Лейбниц [п°229] еще пытается заменить бесконечно малые разности пропорциональными им конечными величинами; наряду с бесконечно малым («неуказуемым») характеристическим треугольником он рассматривает подобный ему конечный («указуемый») треугольник. Но для вывода своих формул он все же не может обойтись без бесконечно малых и без использования *принципа пренебрежения бесконечно малыми высших порядков*.

В ответ на нападки критиков нового исчисления, Лейбниц предлагает заменить «бесконечно малые» величины «несравнимо малыми» величинами, какими являются, например, пылинка по отношению к Земле или Земля по отношению к небесному своду. Наряду с этим Лейбниц, в других своих высказываниях, подчеркивает, что он вовсе не разумеет под бесконечно малой «величину, очень маленькую в действительности, но всегда постоянную и определенную»; эта величина должна быть лишь достаточно мала для того, чтобы ошибка была меньше любой указанной. В этом, если угодно, можно усмотреть намек на сближение с точкой зрения «потенциально» бесконечно малых.

Возможный выход из положения Лейбниц видит даже в том, чтобы считать бесконечно малые как бы «фиктивными» или «идеальными» понятиями, служащими лишь для облегчения открытий и сокращения рассуждений, наподобие мнимых корней в обыкновенном анализе. Наконец, он намечает еще один круг идей, которым пытается обосновать законность своих умозаключений — это его «принцип непрерывности», имеющий некоторую связь с предельным переходом. Но все попытки Лейбница обосновать свое исчисление, видимо, не были до конца убедительными и для него самого. Поставив в одной рукописи вопрос, будут ли бесконечно малые действительно существующими и могут ли они быть строго обоснованы, Лейбниц заявляет: «Я думаю, что это может быть оставлено под сомнением».

С другой стороны, в одной из своих полемических статей он высказывается так: «Я высоко ценю старательность тех, которые стремятся все доказать, вплоть до первоначальных положений, и нередко сам прилагаю к этому старания; однако я не советовал бы чрезмерной тщательностью ставить преграды искусству открытия или под этим предлогом отбрасывать наилучшие открытия и самим себя лишать их плодов...». Таким образом, даже не имея уверенности в возможности обосновать созданное им исчисление, Лейбниц считает применение его оправданным теми результатами, к которым оно приводило.

Это положение вещей как нельзя лучше охарактеризовано Марксом в следующих словах, относящихся именно к математикам той эпохи: «сами верили в мистический характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким

*) См. «Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница», стр. 187—196.

образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие...» *).

233. Послесловие. Ближайшее столетие было ознаменовано дальнейшим расцветом математического анализа, методы его совершенствовались, область применения значительно расширилась. Тем не менее оно в значительной степени сохранило свой «мистический» характер: основы его, неоднократно подвергавшиеся критике, оставались неясными.

Правда, понятие предела, лишь намечавшееся у математиков XVII века, в последующем было уточнено. В предисловии к своему «Дифференциальному исчислению» (1755) знаменитый петербургский академик Леонард Эйлер (1707—1783) с полной отчетливостью говорит о пределе, к которому все более и более приближается отношение приращения двух величин, по мере того как сами приращения становятся все меньшими и меньшими. Мы уже упоминали об этом в n°26, но там же подчеркнули, что в самом трактате Эйлера понятие предела ни разу не используется. Около того же времени французский математик и философ Жак Лерон Даламбер (1717—1783), в своих статьях в известной «Энциклопедии», дал и общее определение предела, причем Даламбер высказал убеждение, что «теория пределов и есть основа для истинной метафизики дифференциального исчисления». В конце XVIII столетия широко пропагандировал применение теории пределов в анализе и геометрии русский математик и механик академик Семен Емельянович Гурьев (1764—1813). Но на деле *понятие предела все же не стало действенным орудием для обоснования математического анализа*. Так, в 1797 г. Лазарь Карно (1753—1823) выступил со своими «Размышлениями о метафизике бесконечно малых» **), где, повторяя уже и ранее высказывавшуюся мысль, он пытается обосновать неизменную правильность результатов, получаемых с помощью сомнительных средств, — взаимной компенсацией погрешностей!

Лишь математики начала XIX столетия — в особенности Огюстен Люи Коши (1789—1857) — *сделали из понятия предела настоящий фундамент для последовательного построения математического анализа в целом*, окончательно изгнав из него всякую мистику. Впрочем, как мы знаем, в этом фундаменте еще оставалась брешь — не хватало строгого обоснования самого понятия вещественного числа и установления непрерывности области вещественных чисел; это было выполнено уже во второй половине прошлого века.

Теперь, наконец, читатель получил возможность уяснить себе в целом картину зарождения, развития и уточнения тех основных понятий дифференциального и интегрального исчисления, которые изучались в этом томе.

*) К. Маркс, «Математические рукописи» (Под знаменем марксизма, 1, 1933), стр. 65.

**) Есть русский перевод (ГТТИ, 1933).

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы)








ФИХТЕНГОЛЬЦ
ОСНОВЫ
МАТЕМАТИ-
ЧЕСКОГО
АНАЛИЗА
I

e, Mr. — er —
rst visit. Well,
"
room, where h
Mr. Edlinger.
etty soon," said
or about four y
ing the depress

red to exchang
He will examin
will check the

y arranging th
ion. He knew
, but still he w
was something
very presence
who would nev

s and with a r
e checked the b
and dime. H

t from [5] Sam T
pass the cigar
way of counting
st put his fing
sacks of silve
and dimes? N
old friend of
since he was
ting the cash, M
ne as "Major T
up to the bank
g the money, a
was, he bega

red that even
ice. When he
ificantly at the
he front door. T

лся человеком
похож на
о входил в банк